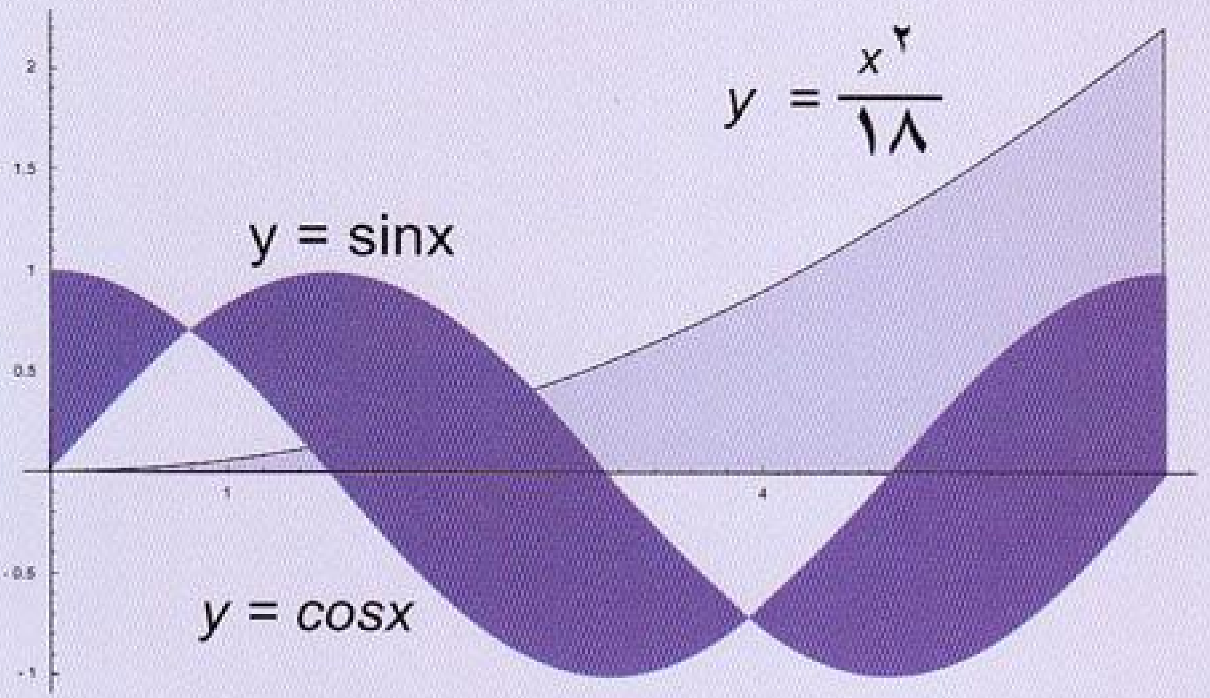
ریاضیات عمومی ۱

(برای رشته های غیر ریاضی)



شاهپور نصرتی

بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات عمومی ۱

(برای رشته های غیر ریاضی)

شاهپور نصرتی

انتشارات سخنکده

۱۳۹۳

سرشناسه	:	نصرتی، شاپور، ۱۳۵۲-
عنوان و نام پدیدآور	:	ریاضیات عمومی ۱
مشخصات نشر	:	تهران سخنکده، ۱۳۹۳ .
مشخصات ظاهری	:	۳۰۲ص.: مصور، نمودار
شابک	:	۹۷۸-۶۰۰-۶۱۰۰-۷۸-۴
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپای مختصر
یادداشت	:	این مدرک در آدرس http://opac.ir قابل دسترسی است.
شماره کتابشناسی ملی	:	۳۵۵۰۹۴۲

انتشارات سخنکده

نام کتاب: ریاضیات عمومی ۱

ناشر: سخنکده

مؤلف: شاهپور نصرتی

چاپ اول: ۱۳۹۳

تیراژ: ۱۳۰۰ نسخه

قیمت: ۱۵۰۰۰ تومان

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۶۱۰۰-۷۸-۴

مراکز فروش: ۱- ضلع جنوب شرقی میدان انقلاب، بازار بزرگ کتاب، شماره۲ تلفن: ۶۶۴۰۸۰۰۰

۲- ضلع جنوب شرقی میدان انقلاب پ ۲۴ فروشگاه گلچین، تلفن: ۶۶۹۶۲۸۴۱

وب سایت فروش آنلاین: wwww.iranbook.ir ایمیل: sokhankadeh@yahoo.com

بنام حق

مقدمه

این مجموعه، مطالب متنوعی از دروس ریاضیات دانشگاهی است که تحت عنوان ریاضیات عمومی تدریس می شود. درس ریاضی عمومی، پایه‌ای برای کلیهٔ ریاضیاتی است که در رشته‌های پایه و فنی و مهندسی و زیرشاخه‌های آنها ارائه می شود. اهمیت این درس و پایه و پیش نیاز بودن آن، دلیلی واضح برای مطالعهٔ دقیق این درس است و لذا ذکر اصول اولیه و مبادی آن الزامی بوده ولی در عین حال لزومی به بیان تمامی مطالب و ریز قضایای ریاضی نیست و به نظر نگارنده برخی از مطالب را می بایست مختص به رشتهٔ ریاضی دانست و سایر رشته‌ها نیازی به شناخت دقیق و مطالب بسیار تکنیکی ریاضی ندارند، بنابراین به بیان لب کلام بسنده کرده و مباحث عمده‌ای از مفاهیم و فرمولبندی های ریاضی مورد استفاده را بیان می‌نمائیم.

در فصول اول تا چهارم مجموعه ها، محور اعداد حقیقی و صفحهٔ مختصات مورد بحث قرار می گیرد تا مبنائی برای فصل پنجم و ششم که توابع هستند، باشند. ذکر این شش فصل برای کلیهٔ رشته های دانشگاهی الزامی است و تحت عنوان ریاضیات پیش دانشگاهی تدریس می گردد. علاوه بر آن در فصل هفتم نیز به ذکر برخی توابع خاص خواهیم پرداخت که اهمیت خاص خود را داراست.

در فصل هشتم دربارهٔ حد و پیوستگی که مفاهیمی پایه در ریاضیات عمومی هستند، صحبت می شود و این مفهوم تا اندازه ای مبنای مشتق است که در فصل نهم بیان شده است. مشتق و دیفرانسیل جزء لاینفک ریاضیات عمومی هستند و در این فصل است که دانشجو خود را باید درون ریاضیات احساس کند. اگر مفهوم مشتق بدرستی برای دانشجو بیان نشود، دانشجو در فصل انتگرال ممکن است دچار مشکل شود. پس سعی بلیغ در بخش مشتق موجب راحتی بیان فرمولهای انتگرال خواهد بود.

هرچند پس از فصل دهم —انتگرال ها— دانشجو آماده است تا ریاضیات مختص به رشتهٔ خود را فراگیرد، لیکن برای رشته های مهندسی فصل بعدی که سری هاست، الزامی بوده و خود بحثی جذاب و مفید خواهد بود و ما این مبحث را به جلد دوم کتاب موکل نموده‌ایم. در جلد دوم کتاب نیز علاوه بر سری ها، به ماتریسها، دستگاه های مختصات، مقاطع مخروطی، بردارها، توابع دو متغیره و چند متغیره و نیز مشتق و انتگرال در این حیطه خواهیم پرداخت. در فصل انتهائی نیز اعداد مختلط را مختصراً بیان نمودیم که برای رشته های فنی و مهندسی و زیرشاخه‌های آن مهم و مفید است.

این کتاب برای دانشجویان رشته های زیر نگارش یافته است:

فیزیک، برق، شیمی، کامپیوتر، مکانیک، عمران، معماری، زیست، نجوم، حسابداری، مدیریت، اقتصاد و تربیت بدنی.

در مجموع مطالب برای اکثر رشته‌ها قابل استفاده بوده و در این وجیزه سعی شده تا عمدهٔ مطلب بیان شده و حداقل خلاصه‌ای از مفاهیم مورد نیاز تشریح گردد. مطالب مستقیماً از منبع خاصی گرفته نشده ولی تا حد امکان سعی شده تا چارچوب کاربردی آنها حفظ شود. برای انتقال و درک بیشتر مفاهیم و مطالب، از مثالها و تمرینات و مطالب ارزنده استفاده شده که در پایان هر بخش این تمرینات متنوع، برای دانشجویان تذکری ضروری بشمار می رود.

باز تاکید می کنم که این کتاب مختص رشته ریاضی نیست. شما در هیچ جا به قضیه یا لمی برخورد نمی کنید و اثباتی در آن نخواهید یافت. پس علاقمند به اثباتها و مطالب دقیقتر باید به کتب مختص ریاضی مراجعه نماید.

به تمرینات خیلی اهمیت می دهیم زیرا ریاضی یعنی تمرین و بدون آن، دانشجو درس را بخوبی یاد نخواهد گرفت. تمرینات در عین سادگی شامل برخی تمرینات مشکل نیز بوده و استاد می تواند در صورت لزوم و فرصت کافی در کلاس، برخی تمرینات را در خلال تدریس حل کند و همچنین برخی تمرینات مختص رشته های خاصی طرح شده پس شایسته است استاد نسبت به رشتهٔ مورد تدریسش اشرافی ولو مختصر داشته باشد.

از محاسن نگارش این کتاب این است که می توان آنرا بصورت خودخوان و بدون معلم مطالعه نمود. در اینجا نیز فرد باید حل تمرینات را بسیار مورد توجه قرار دهد. علاوه بر این علاقمندان می توانند جواب برخی تمرینات را از آدرس زیر دریافت نمایند:

$www.OlumCAMP.ir/Math/index.php$

متن حاضر با نرم افزار «فارسی‌تک» تایپ شده است که نرم افزاری قوی در فرمولنویسی ریاضی است. مسلماً نوشتار خالی از اشکالات تکنیکی و متنی نیست و خوانندهٔ محترم به بزرگواری خویش ما را می بخشند.

شاهپور نصرتی
زمستان ۸۷

فهرست مندرجات

فصل ۱

مجموعه ها

در ابتدا لازم است که در مورد مجموعه ها صحبت کنیم و از آن جهت که حیطهٔ کار ما، مجموعه های عددی است لذا این فصل را بطور ضمنی در اکثر نقاط کتاب استفاده خواهیم نمود و کاربرد عمدهٔ مجموعه ها، در مجموعه های عددی و نمودارها خواهد بود.

۱.۱ تعاریف

دسته بندی اشیاء هرچند بی ارتباط با ریاضی بنظر می رسد، اما در واقع هر دسته از اشیاء در ریاضی به امری مجرد تبدیل و سپس مورد بحث قرار می گیرند. برای دسته بندی از نماد «مجموعه» کمک می گیریم که مفهومی فاقد تعریف است ولی بطور قابل ملاحظه‌ای دارای نمودی عینی است.

۱.۱.۱ مجموعه

مجموعه از مفاهیم تعریف نشدهٔ ریاضی مانند خط و نقطه در هندسه است و مختصراً منظور از یک مجموعه دسته‌ای از اشیاء هستند که کاملاً مشخص اند. معمولاً مجموعه را با حروف بزرگ لاتین $A, B, C, \cdots$ نشان داده و هر شیء نسبت به مجموعه دو حالت دارد، یا متعلق به مجموعه است $a \in A$ و یا متعلق به مجموعه نیست $a \notin A$. به هر شیء درون مجموعه عضو مجموعه گوئیم. **عضویت** یک شیء به مجموعه را با $\in$ نشان می دهیم، برای مثال می نویسیم $a \in A$. اشیای درون مجموعه را با حروف کوچک $a, b, c, \cdots$ نمایش می دهیم.

از نظر تعداد عضوها، مجموعه‌ها به دو دستهٔ **متناهی (محدود)** و **نامتناهی (نامحدود)** تقسیم بندی می شوند مثلاً

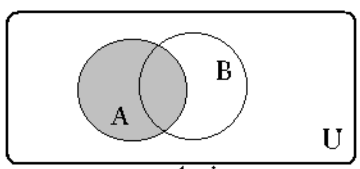
$$A = \{a, b, c\}$$ مجموعهٔ متناهی
$$B = \{۱, ۲, ۳, \cdots\}$$ مجموعهٔ نامتناهی

مجموعهٔ کلی مورد بحث را **مجموعهٔ مرجع** نامیده و با U نشان می دهیم. مجموعهٔ بدون عضو را **مجموعهٔ تهی** نامیم و آنرا با ϕ یا $\{\ \}$ مشخص می کنیم.

نمایش مجموعه با علائم ریاضی بصورت $C = \{x|\, P(x)\}$ بوده و می خوانیم «C مجموعه‌ای با اعضاء x است بقسمی که هر x دارای خاصیت $P(x)$ می باشد». **متغیر** x حرف یا علامتی است که جانشین هر عضو مجموعه شده و $P(x)$ بایستی خاصیتی کاملاً مشخص باشد. در زیر مجموعه‌ای را به دو صورت **نمایش عضوی** و **نمایش ریاضی** نشان می دهیم:

{ آ , ب , پ } = {x| یکی از سه حرف اول الفباست x}

نمایش هندسی یک مجموعه توسط نمودار را **نمودار ون** یا **اویلر–ون** گوئیم که اولین بار توسط ریاضیدان انگلیسی «ون» ابداع شد.



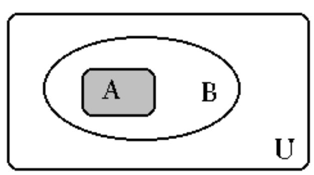
نمودار ون

۲.۱.۱ زیرمجموعهٔ یک مجموعه

گوئیم A زیرمجموعهٔ B است اگر هر عضو A در B نیز باشد و می نویسیم $A \subseteq B$. **تعریف** ریاضی آن چنین است:

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow \ (x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

اگر A زیرمجموعهٔ B نباشد می نویسیم $A \nsubseteq B$.



عبارات زیر را داریم:

آ) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ آنگاه داریم $A = B$.

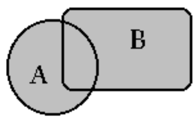
ب) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ آنگاه داریم $A \subseteq C$.

پ) برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند C داریم $\phi \subseteq C \subseteq U$.

۲.۱ اعمال روی مجموعه‌ها

دو مجموعهٔ A و B می توانند توسط اجتماع، اشتراک و تفاضل در کنار هم قرار بگیرند که حاصل آن نیز مجموعه‌ای در حیطهٔ همان مجموعهٔ مورد بحث (یا مجموعهٔ مرجع) خواهد بود:

۱.۲.۱ اجتماع



اجتماع دو مجموعه را با $A \cup B$ نشان داده و عبارتست از مجموعه‌ای که اعضایش همان اعضاء A است همراه با اعضاء B. به عبارت دیگر

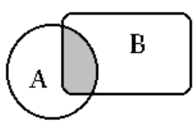
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \text{ یا } \ x \in B\}$$

برای مثال اگر $A = \{۱, ۳, ٦, ۲۸\}$ و $B = \{۲, ۳, ٦, ۷\}$ دو مجموعه باشند سپس اجتماع آنها $A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ٦, ۷, ۲۸\}$ خواهد بود.

۲.۲.۱ اشتراک

اشتراک دو مجموعه را با $A \cap B$ نشان داده و عبارتست از مجموعه‌ای که اعضایش هم در A هستند و هم در B. یعنی

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \text{ و } \ x \in B\}$$

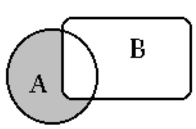


برای مثال اگر $A = \{۱, ۳, ٦, ۲۸\}$ و $B = \{۲, ۳, ٦, ۷\}$ دو مجموعهٔ قبل باشند، اشتراک آنها عبارتست از $A \cap B = \{۳, ٦\}$.

۳.۲.۱ تفاضل

تفاضل دو مجموعه را با $A - B$ نشان داده و عبارتست از مجموعه‌ای از اعضاء A که در B نیستند. به عبارتی

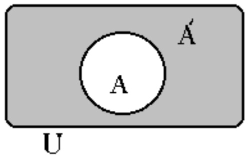
$$A - B = \{x \mid x \in A \ \text{ و } \ x \notin B\}$$



مثلاً دو مجموعهٔ $A = \{۱, ۳, ٦, ۲۸\}$ و $B = \{۲, ۳, ٦, ۷\}$ دارای تفاضل $A - B = \{۱, ۲۸\}$ هستند.

۴.۲.۱ متمم

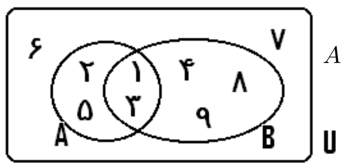
متمم یک مجموعه A را با A' (آ پریم) نشان داده و عبارتست از مجموعهٔ تمام اعضائی از مرجع که در A نیستند، یعنی $A' = U - A$.



مثال ۱.۱ فرض کنید $U = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ مجموعهٔ مرجع و A و B بصورت زیر باشند.

$$A = \{۱,۲,۳,۵\} \quad , \quad B = \{۱,۳,۴,۸,۹\}$$

مجموعه های زیر براحتی نتیجه می شوند:



$$A \cup B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۸,۹\} \quad , \quad A \cap B = \{۱,۳\}$$
$$A' = \{۴,۶,۷,۸,۹\} \quad , \quad B' = \{۲,۵,۶,۷\}$$
$$A - B = \{۲,۵\} \quad , \quad A \cap B' = \{۲,۵\}$$

مطلب ۱.۱ برای هر دو مجموعه مانند A و B داریم $A - B = A \cap B'$

مطلب ۲.۱ برای هر مجموعهٔ دلخواه A داریم:

آ) $A \cap \phi = \phi \quad , \quad A \cup \phi = A$

ب) $A \cap U = A \quad , \quad A \cup U = U$

پ) $A \cap A = A \quad , \quad A \cup A = A$

ت) $A \cap A' = \phi \quad , \quad A \cup A' = U$

ث) $\phi' = U \quad , \quad U' = \phi$

علاوه بر این قوانین اولیه که در مطلب فوق بیان شده، چهار قانون مهم بین مجموعه ها برقرار است که بصورت زیرند:

مطلب ۳.۱ بین سه مجموعهٔ دلخواه A و B و C روابط زیر برقرار است:

آ) قوانین جابجائی:

$$A \cup B = B \cup A \quad , \quad A \cap B = B \cap A$$

ب) قوانین شرکتپذیری:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad , \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

پ) قوانین پخشی:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad , \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

ت) قوانین دمورگان:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad , \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

مثال ۲.۱ عبارت $(A - B) \cap B$ را ساده کنید.

حل. مطابق قوانین بالا می نویسیم:

$$\begin{aligned} (A - B) \cap B &= (A \cap B') \cap B && \text{طبق مطلب ۱.۱} \\ &= A \cap (B' \cap B) && \text{قانون شرکتپذیری} \\ &= A \cap \phi && \text{طبق مطلب ۲.۱(ت)} \\ &= \phi \end{aligned}$$

مثال ۳.۱ ثابت کنید $A \cup (A \cap B) = A$.

حل. مطابق قوانین مطلب ۲.۱ چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= (A \cap U) \cup (A \cap B) && \text{طبق مطلب ۲.۱(ب)} \\ &= A \cap (U \cup B) && \text{قانون پخشی} \\ &= A \cap U && \text{طبق مطلب ۲.۱(ب)} \\ &= A && \text{طبق مطلب ۲.۱(ب)} \end{aligned}$$

تمرین ۱.۱ تکمیلی.

۱) فرض کنید $U = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ٦, ۷\}$ مجموعهٔ مرجع و A و B بصورت زیر باشند.

$$A = \{۱, ۲, ۵\} \quad , \quad B = \{۱, ۳, ۴, ۵, ۷\}$$

مجموعه های زیر را یافته و با نمودار ون نیز آنها را نشان دهید.

$$B - A \quad , \quad B \cap A' \quad , \quad A' \quad , \quad B' \quad , \quad A \cup B \quad , \quad A \cap B$$

با استفاده از یافته های بالا درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص نمائید:

$$\{۲\} \in A \quad , \quad ۱ \in A \quad , \quad ۳ \subseteq A \quad , \quad \{B\} \in A \quad , \quad B \in A \quad , \quad \{۲\} \in B - A$$

$$A \subset B \quad , \quad A - B \in A \quad , \quad A' \subset B' \quad , \quad A' \cup B = (B - A)' \quad , \quad B - A = A \cap B'$$

۲) فرض کنید $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \cdots\}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی، مجموعهٔ مرجع بوده و همچنین $\mathbb{O} = \{۱, ۳, ۵, \cdots\}$ **مجموعهٔ اعداد فرد** و $\mathbb{E} = \{۲, ۴, ٦, \cdots\}$ **مجموعهٔ اعداد زوج** باشند. مجموعه های زیر را بیابید.

$$(\mathbb{E} \cup \mathbb{N}) - \mathbb{O} \quad , \quad (\mathbb{N} - \mathbb{E}) \cup \mathbb{E} \quad , \quad (\mathbb{E} \cup \mathbb{O}) - \mathbb{N} \quad , \quad (\mathbb{E} \cap \mathbb{O})' \cup \mathbb{E}$$

$$\{x \in \mathbb{E} | x < ۹\} \quad , \quad \{x \in \mathbb{N} | ۲ \leq x < ۱۰\} \quad , \quad \{x \in \mathbb{E} | x < ۹, x > ۱۲\}$$

$$\{x \in \mathbb{O} | x \notin \mathbb{N}\} \quad , \quad \{x \in \mathbb{O} | ۷ < x < ۲۰\} \quad , \quad \{x \in \mathbb{N} | x \notin \mathbb{O}\}'$$

عبارات زیر را ساده کنید:

۳) $(A - B)' \cup A$

۴) $(A' \cup B')' \cup (B - A)$

۵) $(A - B)' \cap (A \cup B)$

٦) $(A' - B)' \cap B'$

۷) $(A - B) \cup (A' \cap B')$

۸) $(A - B) \cup (A \cap B)$

۹) $(A - B) \cap (B - A)$

ثابت کنید:

۱۰) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$

۱۱) $[(A \cup B) - B] \cup (A \cap B) = A$

۱۲) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

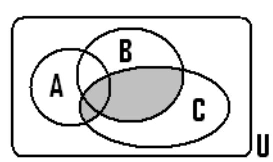
۱۳) $A \cap (A \cup B) = A$

۱۴) $A \cup (A \cap B) = A$

۱۵) $(A')' = A$

۱٦) برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند A مقدار $A \cup (A \cap (A \cup (A \cap (A \cup (\cdots)))))$ چیست؟

۱۷) در نمودار ون روبرو، قسمت خاکستری می تواند نمایش چه مجموعه‌ای باشد؟



فصل ۲

مجموعه اعداد حقیقی

۱.۲ مجموعه های عددی

مهمترین عناصر ریاضی، اعدادند. در ریاضی اعداد را دسته بندی نموده و به هر مجموعهٔ عددی، نام خاصی داده اند. از قدیمی ترین مجموعه‌های عددی شناخته شده، مجموعهٔ اعداد طبیعی و مجموعهٔ اعداد صحیح بشکل زیرند:

$\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \cdots\}$ مجموعه اعداد طبیعی

$\mathbb{Z} = \{\cdots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \cdots\}$ مجموعه اعداد صحیح

علاوه بر اینها مجموعهٔ تمام اعدادی که بتوان، آنها را بصورت کسری با صورت و مخرج صحیح نوشت را اعداد گویا نامیده و با $\mathbb{Q}$ نشان می دهیم. برای مثال

$$\frac{۳}{۲} \in \mathbb{Q} \quad , \quad ۰/۱۲۴۹ = \frac{۱۲۴۹}{۱۰۰۰۰} \in \mathbb{Q} \quad , \quad -۴/۸۹ = \frac{۴۸۹}{-۱۰۰} \in \mathbb{Q}$$

با تقسیم صورت یک کسر بر مخرجش می توان یک عدد اعشاری ساخت. به عدد اعشاری که یک یا چند رقم آن مرتباً تکرار می شوند «عدد اعشاری متناوب» گویند. این مقدار تکرار شونده را **دورهٔ گردش** نامیم مانند عدد اعشاری $۲/۷۸۸۵۶۸۵۶۸۵۶\cdots$ که دارای دوره گردش ۸۵۶ است و بنابراین این عدد را می توان بشکل $۲/۷\overline{۸۸۵۶}$ نوشت. پس برای اعداد گویا می توان گفت: مجموعهٔ اعداد گویا عبارتست از مجموعهٔ اعداد اعشاری مختوم مانند $۰/۱۲۵۴۶۳$ و اعداد اعشاری متناوب مانند $۰/۱۹۰۱۹۰\cdots$.

بطور خلاصه برای اعداد اعشاری می توان چنین بیان نمود:

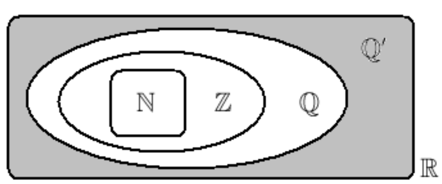
- هر عدد اعشاری مختوم یا متناوب نمایش یک عدد گویاست.
- هر تعداد صفر بعد از یک عدد اعشاری مختوم، مقدار آنرا تغییر نمی دهد.
- عدد اعشاری که به بی نهایت ۹ ختم شود نمایش عددی گویاست.
- جمع و تفریق اعداد اعشاری مانند اعداد معمولی با حفظ مکان اعشار است.
- حاصلضرب دو عدد اعشاری مثبت یا دو عدد اعشاری منفی، مثبت است.
- هر عدد اعشاری متناوب قابل تبدیل به عددی کسری با صورت و مخرج صحیح است.

مثال ۱.۲ عدد اعشاری $x = ۲/۴۵۹۹۹۹$ را بصورت کسری نشان دهید.

حل. چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned} x &= ۲/۴۵\overline{۹} \\ ۱۰۰x &= ۲۴۵/\overline{۹} \\ ۱۰۰۰x &= ۲۴۵۹/\overline{۹} \\ ۱۰۰۰x - ۱۰۰x &= ۲۴۵۹/\overline{۹} - ۲۴۵/\overline{۹} \\ ۹۰۰x &= ۲۲۱۴ \\ x &= \frac{۲۲۱۴}{۹۰۰} \end{aligned}$$

علاوه بر این اعدادی وجود دارند که جزء هیچکدام از مجموعه اعداد طبیعی، صحیح و گویا نیستند مثل $\sqrt{۲}$ و π اینگونه اعداد غیرگویا، تشکیل مجموعه **اعداد گنگ** داده و آنرا با $\mathbb{Q}'$ نشان می دهیم. لذا هر عدد اعشاری که متناوب یا مختوم نباشد گنگ (اصمّ) است. چنین مجموعه‌ای شامل اعدادی مانند $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، $\sqrt[۵]{۹}$ و کلیهٔ رادیکالهائی مانند $\sqrt[n]{a}$ است که دارای ریشهٔ گویا نبوده و هر عدد اعشاری نامختوم غیرمتناوب را نیز در بر می گیرد. مشهورترین اعداد گنگ، عبارتند از عدد π برابر ...۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۹ و عدد نپر e برابر ...۲/۷۱۸۲ است که در محاسبات عددی بطور تقریبی برابر $\pi = ۳/۱۴$ و $e = ۲/۷$ در نظر گرفته می شوند.



شکل ۱.۲ مجموعه‌ی اعداد حقیقی و زیر مجموعه های آن

مجموعهٔ تمام اعداد گویا و گنگ، **اعداد حقیقی** را تشکیل داده که با $\mathbb{R}$ نشان داده و مجموعهٔ مرجع خواهد بود. بطور کلی $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ و $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

تمرین ۱.۲ .

۱) مجموعه های عددی زیر را بیابید.

$$
\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -۲ \text{ و } x < ۱\} \\
B &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x < ۱۰ \text{ و } x > ۰/۵\} \\
C &= \{x \in \mathbb{Q} \mid ۱ \leq x \leq ۲\} \\
D &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq ۲ \text{ و } x < ۱۰ \text{ و } x \text{ فرد است}\}
\end{aligned}
$$

۲) درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین نمائید.

$$
\frac{۲}{۵} \in \mathbb{N} \ , \ \ \frac{۳}{۵} \in \mathbb{Z} \ , \ \ ۰/۴ \in \mathbb{N} \ , \ \ -۰/۲۵ \in \mathbb{Q} \ , \ \ \sqrt{۳/۱۴} \in \mathbb{Q} \ , \ \ -۱/\overline{۳} \in \mathbb{R}
$$

$$
\frac{\sqrt{۲}}{۵} \in \mathbb{R} \ , \ \ \frac{۹}{۳} \in \mathbb{N} \ , \ \ -\sqrt{\frac{۱}{۹}} \in \mathbb{Z} \ , \ \ \sqrt{۱۲۱} \in \mathbb{Q}' \ , \ \ \sqrt[۳]{\pi^۵} \in \mathbb{R} \ , \ \ -\frac{۲}{۳} \in \mathbb{Q}'
$$

۳) حاصلجمع دو عدد ···۰/۹۹۹۹ و ···۰/۱۱۱۱۱ چیست؟

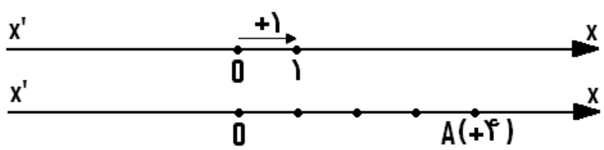
۴) دو عدد گنگ مثال بزنید که حاصل جمعشان عددی گویا باشد.

۵) آیا می توان گفت که مجموع یا حاصلضرب عدد گنگ و عدد گویا، گنگ است. مجموع و حاصلضرب دو عدد گنگ چطور؟ در هر حالت مثال بزنید.

۱.۱.۲ محور اعداد حقیقی

محور حقیقی عبارتست از خط راستی که روی آن نقطه ای بعنوان **مبدأ** O اختیار نموده و یک جهت (مثبت) برای آن در نظر می گیریم. روی محور فاصله ای دلخواه را بعنوان **واحد طول** در نظر گرفته و آنرا ۱ می نامیم.

بدین ترتیب هر نقطه روی این محور با یک عدد مشخص می شود که به آن طول نقطه گوئیم مثلاً $A(+۴)$ یعنی نقطه A دارای طول $+۴$ است. برای رسم این نقطه روی محور در جهت مثبت ۴ واحد جلو بروید[1] (شکل ۲.۲).



شکل ۲.۲ محور اعداد حقیقی و مکان یک نقطه بر روی آن

[1] برخی کتب آموزشی برای محور دو جهت رسم می کنند، که امری اشتباه محسوب شده و می بایست تنها یک جهت، آنهم برای نشان دادن جهت مثبت برای محور قائل شد.

فواصل عددی روی محور را بازه نامیده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

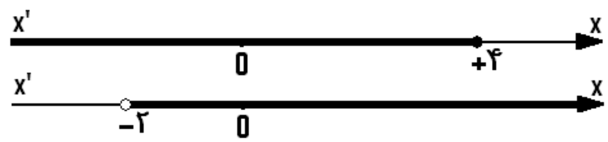
$$
\begin{aligned}
\text{بازه‌ی بسته} \quad [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\} \\
\text{بازه‌ی نیم بسته یا نیم باز} \quad (a,b] &= \{x \in \mathbb{R} |\ a < x \leq b\} \\
\text{بازه‌ی نیم بسته یا نیم باز} \quad [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x < b\} \\
\text{بازه‌ی باز} \quad (a,b) &= \{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\}
\end{aligned}
$$

تفاوت چهار بازهٔ بالا در نقاط ابتدائی و یا انتهائی آنهاست. در حالتی که بازه، از یک طرف به بی نهایت منتهی می شود، بازه را باز می گذاریم مانند مثال زیر

مثال ۲.۲ بازه های $(-۲,+\infty)$ و $(-\infty,۴]$ را مشخص و آنها را روی محور نشان دهید.

حل. این دو بازه چون از یکطرف به بی نهایت ختم می شوند چنانند که در شکل۳.۲ زیر نمایش داده شده‌اند.

$$
\begin{aligned}
(-\infty, ۴] &= \{x \in \mathbb{R} | x \leq ۴\} \\
(-۲, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} | x > -۲\}
\end{aligned}
$$



شکل ۳.۲ نمایش بازه های نامحدود بر محور اعداد

مثال ۳.۲ بازه ها را بایستی بعنوان مجموعه های عددی بررسی نمود.

$$
\begin{array}{lcl}
(۱,۳] \subset [۱,۴) & , & \frac{۴}{۳} \notin [-۲,۱] \\
(-\infty,۴] \cap (۲,\infty) = (۲,۴] & , & (-\infty,۳] \cap (۱,۵) = (۱,۳] \\
(۲,۴] - [۳,۵) = (۲,۳) & , & (-۲,\infty) \cup (-\infty,-۲) = \mathbb{R} - \{-۲\}
\end{array}
$$

مطلب ۱.۲ برخی از روابط بین اعداد حقیقی دلخواه a و b چنین است:

$$
\begin{array}{lcl}
-(a+b) = (-a) + (-b) \quad , \quad a \times ۰ = ۰ \quad , \quad -(+a) = -a \\
(-a) \times (-b) = a \times b \quad , \quad a \times ۱ = a \quad , \quad -(-a) = +a
\end{array}
$$

تمرین ۲.۲ حاصل مجموعه‌های زیر را حساب کنید:

$$(a)\ (-\infty,۴]\cap(-\infty,۵) \quad , \quad (b)\ (-\infty,-۲]\cup(-۲,\infty)$$
$$(c)\ (-۲,\infty)\cup(-\infty,۲) \quad , \quad (d)\ \{(-۱,\infty)-(-\infty,۱)\}\cap(۰,۲]$$
$$(e)\ (۱,۳)-[۱,۳) \quad , \quad (f)\ \{(-\infty,۲/۵)\cap(-۳,\infty)\}'\cap(-۱,۴]$$

۲.۱.۲ کسرها

روابط کسری بین اعداد حقیقی دلخواه a و b و چهار عمل اصلی چنین است:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd} \quad , \quad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \quad , \quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

در حالات خاص عدد ناصفر a دارای چنین رفتارهائی است:

$$\frac{a}{۱}=a \quad , \quad \frac{۰}{a}=۰ \quad , \quad \frac{a}{۰}=\infty$$

قرار دادن منفی در پشت کسر و یا صورت و مخرج کسر تفاوتی نخواهد کرد:

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$$

برای تساوی کسری $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ترکیب و تفضیل نسبت در صورت و مخرج عبارتند از

ترکیب نسبت در مخرج $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$ ، ترکیب نسبت در صورت $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

تفضیل نسبت در مخرج $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$ ، تفضیل نسبت در صورت $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

۲.۲ اعمال دیگر روی اعداد

۱.۲.۲ فاکتوریل

برای عدد طبیعی n، مقدار **فاکتوریل** $n!$، عددی است که چنین تعریف می شود:

$$n!=۱\times۲\times۳\times۴\times\cdots\times(n-۱)\times n$$

حاصل این مقدار نیز عددی طبیعی است. مثلاً مقادیر !۵ و !۷ چنینند:

$$۵!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵=۱۲۰$$
$$۷!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶\times۷=۵۰۴۰$$

۲.۲.۲ توان

برای عدد حقیقی مانند a و عدد طبیعی مانند n عدد تواندار a^n عبارتست از حاصلضرب n بار عدد a یعنی

$$a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a \qquad n \text{ عامل}$$

عدد a را **پایه** و عدد n را **توان** یا **نما** گوئیم. برای اعداد حقیقی ناصفری مانند a و b و اعداد صحیح m و n داریم:

$$\begin{array}{llll}
a^m \times a^n = a^{m+n} & , \quad a^m \div a^n = a^{m-n} & , \quad a^{۱} = a & , \quad a^{۰} = ۱ \\
a^n \times b^n = (ab)^n & , \quad a^n \div b^n = (\frac{a}{b})^n & , \quad (a^m)^n = a^{mn} & , \quad a^{-n} = \frac{۱}{a^n} \\
(+a)^n = +a^n & , \quad (-a)^n = \begin{cases} +a^n & \text{زوج } n, \\ -a^n & \text{فرد } n. \end{cases} & &
\end{array}$$

منظور از **توان مرکب** عدد a^{m^n} محاسبهٔ توان m^n بطور جداگانه و سپس لحاظ آن برای عدد a می باشد. در حالت کلی تر توان یک عدد می تواند عددی حقیقی باشد.

$$\left(\left(۳^{\frac{۲}{۳}}\right)^{\frac{۵}{۷}}\right)^{\pi} = ۳^{\frac{۱۰\pi}{۲۱}}$$

به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۴.۲ حاصل عبارت زیر چیست؟

$$\frac{۲^{۷} \times ۳^{-۴} \times ۴^{۳}}{۳^{۲} \times (۴۵)^{۲}} \times \frac{۳^{۵} \times ۲^{-۶}}{۴^{-۱۲}}$$

حل. طبق خواص توان، عبارت را ساده می کنیم:

$$\begin{aligned}
\frac{۲^{۷} \times ۳^{-۴} \times ۴^{۳}}{۳^{۲} \times (۴۵)^{۲}} \times \frac{۳^{۵} \times ۲^{-۶}}{۴^{-۱۲}} &= \frac{۲^{۷} \times ۳^{-۴} \times ۴^{۳} \times ۳^{۵} \times ۲^{-۶}}{۳^{۲} \times ۴^{۱۰} \times ۴^{-۱۲}} \\
&= \frac{۲^{۷-۶} \times ۳^{-۴+۵} \times ۴^{۳}}{۳^{۲} \times ۴^{۱۰-۱۲}} \\
&= \frac{۲ \times ۳ \times ۴^{۳}}{۳^{۲} \times ۴^{-۲}} \\
&= \frac{۲ \times ۴^{۳} \times ۴^{۲}}{۳} \\
&= \frac{۲ \times (۲^{۲})^{۵}}{۳} \\
&= \frac{۲^{۱۱}}{۳}
\end{aligned}$$

۳.۲.۲ رادیکال

برای عدد حقیقی مانند a و عدد طبیعی مانند n مقدار **رادیکال** $\sqrt[n]{a}$ را ریشهٔ n−ام a نامیده و عبارتست از عددی مانند b چنانکه $a = b^n$. n را **فرجهٔ رادیکال** گوئیم و معمولاً عدد ۲ را در فرجه نمی نویسیم. مقدار $\sqrt{a}$ را جذر a و مقدار $\sqrt[3]{a}$ را کعب a خوانند. هنگامی که مقدار n زوج باشد a باید مثبت تعریف شود. همچنین مقدار $\sqrt[n]{a^m}$ را می توان به شکل عدد تواندار $a^{\frac{m}{n}}$ نمایش داد، یعنی

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

که برای a−ی مثبت یا m فرد قابل تعریف است. علاوه بر این

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad , \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad , \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[n]{c^n.a} = c\sqrt[n]{a} \qquad , \qquad \sqrt[n]{a} = \begin{cases} a & \text{مثبت } a \text{ زوج و } n, \\ -a & \text{منفی } a \text{ زوج و } n, \\ a & \text{فرد } n. \end{cases}$$

مثال ۵.۲ عبارت رادیکالی زیر را ساده نمائید.

$$۲\sqrt[۳]{۱۶} + ۳\sqrt[۳]{۵۴} - ۹\sqrt[۳]{۱۹۲}$$

حل. هر عدد زیر رادیکال را به عوامل اول تجزیه کرده و با حذف توانی از آن، عدد را از زیر رادیکال خارج می کنیم:

$$\begin{aligned} ۲\sqrt[۳]{۱۶} + ۳\sqrt[۳]{۵۴} - ۹\sqrt[۳]{۱۹۲} &= ۲\sqrt[۳]{۲^۴} + ۳\sqrt[۳]{۲ \times ۳^۳} - ۹\sqrt[۳]{۲^۶ \times ۳} \\ &= ۲ \times ۲\sqrt[۳]{۲} + ۳ \times ۳\sqrt[۳]{۲} - ۹ \times ۲^۲\sqrt[۳]{۳} \\ &= ۴\sqrt[۳]{۲} + ۹\sqrt[۳]{۲} - ۳۶\sqrt[۳]{۳} \\ &= -۲۳\sqrt[۳]{۲} \end{aligned}$$

معمولاً در کسرهائی که مخرج رادیکالی دارند، سعی خواهیم نمود که رادیکال مخرج را حذف کرده و اصطلاحاً کسر را **گویا** کنیم. برای اینکار برای کسری با مخرج $\sqrt[n]{a^m}$ کافیست صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب نموده و مخرج را به a تحویل نمائیم. کسرهای زیر را گویا کرده ایم:

$$\frac{۳}{\sqrt{۲}} = \frac{۳ \times \sqrt{۲}}{\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\frac{۳}{\sqrt[۵]{۴^۲}} = \frac{۳ \times \sqrt[۵]{۴^۳}}{\sqrt[۵]{۴^۲} \times \sqrt[۵]{۴^۳}} = \frac{۳\sqrt[۵]{۴^۳}}{۴}$$

تمرین ۳.۲ .

۱) عبارات زیر را ساده کنید.

$(a)\quad (\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}) \div (\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{٦}+\frac{۱}{۸})\quad , \quad (b)\quad (\frac{۱}{٦}-\frac{۴}{۳}-\frac{۲}{۹}) \times (۲\frac{۳}{۴}+٦\frac{۵}{٦})$

$(c)\quad \frac{۲^{۷}\times ۵^{-۴}\times ۴^{۳}}{۵^{۲}\times (۴۵)^{۲}} \times \frac{۵^{٦}\times ۲^{-٦}}{۴^{-۱۲}}\quad , \quad (d)\quad (\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۳})^{۴} \div (\frac{۵}{۲})^{۲^{۳}}$

$(e)\quad \frac{۲^{۱}}{۱!}+\frac{۲^{۲}}{۲!}+\frac{۲^{۳}}{۳!}+\frac{۲^{۴}}{۴!}\quad , \quad (f)\quad \frac{\sqrt[۳]{۴^{۷}}\times ۲^{۲}\times \sqrt[۴]{۲^{۹}}\times \sqrt[۳]{۲}}{\sqrt{۲^{۳}}\times ۲۵}$

$(g)\quad ۵\sqrt{۸}-۳\sqrt{۲}-۴\sqrt{۳۲}\quad , \quad (h)\quad ۲\sqrt{۲۷}-۴\sqrt{۳}+۱۲\sqrt{۲۴۳}$

$(i)\quad \frac{۴^{۴۴}+۴^{۴۴}+۴^{۴۴}+۴^{۴۴}}{۲^{۲۲}+۲^{۲۲}}\quad , \quad (j)\quad \frac{\sqrt[۴]{\sqrt[۵]{۳^{۲}}}\times \sqrt[۵]{\sqrt[۴]{۳^{۳}}}}{\sqrt{\sqrt{۳}}}$

$(k)\quad \sqrt[۳]{۵^{۳}\sqrt{۵^{۴}\sqrt{۵^{۴}}}}\quad , \quad (l)\quad (\frac{۱}{۹})^{-۲}(\frac{۲}{۲۷})^{۲}(\frac{۸۱}{۱۸})$

۲) مخرج عبارات زیر را گویا نمائید.

$(a)\ \frac{۱۰}{\sqrt{۵}}\ ,\quad (b)\ \frac{۳}{۴\sqrt{۳}}\ ,\quad (c)\ \frac{۳\sqrt{۲}}{۷\sqrt[۵]{۱۲}}\ ,\quad (d)\ \frac{۱}{۴\sqrt[۷]{۲\sqrt{۳}}}\ ,\quad (e)\ \sqrt{\frac{۲۰-\sqrt{۵}}{۳\sqrt{۸}}}$

۴.۲.۲ نماد علمی و استاندارد علمی

در محاسبات علمی از توانهای ۱۰ زیاد استفاده می شود و در محاسبات نیز، برای تبدیل مقیاسها طبق استانداردهای بین المللی باید ضرایب ۱۰ را بکار برد. نمایش عدد با ضریب توانی از ۱۰ را **عدد علمی** یا **نماد علمی** نامند. مثلاً می دانیم هر کیلومتر برابر ۱۰۰۰ متر است و می‌نویسیم $۱km = ۱۰۰۰m$ و با نماد علمی $۱km = ۱۰^{۳}m$ که محاسبات را ساده تر خواهد کرد. در نگارش نماد علمی ضرایب عددی را با یک عدد صحیح نوشته و مابقی را بعد از اعشار ذکر می کنیم. برای مثال بجای ۱۳۵۲ می نویسیم $۱/۳۵۲ \times ۱۰^{۳}$.

مثال ٦.۲ **(زیست)** جرم خشک یک ذره ویروس تبخال[۲] را با میکروسکپ الکترونیکی اندازه گرفته اند. وزن نوکلئوتید (DNA) آن ۲×۱۰^{-۱٦} گرم، وزن کپسید (پوشش) ۵×۱۰^{-۱٦} گرم و وزن نوکلئوکپسید آن ۸×۱۰^{-۱٦} گرم بوده است. وزن این ویروس چند گرم است.

حل. مجموع وزن نوکلئوتید، کپسید و نوکلئوکپسید این ویروس برابر ۱۵×۱۰^{-۱٦} گرم یا $۱/۵ \times ۱۰^{-۱۵}$ گرم است.

[۲] $Strain$ ۱۱۴۰

تبدیل مقیاسهای علمی عموماً با پیشوندهای بین المللی SI انجام می گیرد. این پیشوندها مطابق جدول زیرند:

ضریب	پیشوند	نماد	ضریب	پیشوند	نماد
$۱۰^{۲۴}$	یوتا	Y	$۱۰^{-۱}$	دسی	d
$۱۰^{۲۱}$	زتا	Z	$۱۰^{-۲}$	سانتی	c
$۱۰^{۱۸}$	اگزا	E	$۱۰^{-۳}$	میلی	m
$۱۰^{۱۵}$	پتا	P	$۱۰^{-۶}$	میکرو	μ
$۱۰^{۱۲}$	ترا	T	$۱۰^{-۹}$	نانو	n
$۱۰^{۹}$	گیگا	G	$۱۰^{-۱۲}$	پیکو	p
$۱۰^{۶}$	مگا	M	$۱۰^{-۱۵}$	فمتو	f
$۱۰^{۳}$	کیلو	k	$۱۰^{-۱۸}$	آتو	a
$۱۰^{۲}$	هکتو	h	$۱۰^{-۲۱}$	زپتو	z
$۱۰^{۱}$	دکا	da	$۱۰^{-۲۴}$	یوکتو	y

دقت کنید در ضریب واحدها حروف کوچک و بزرگ متفاوتند. ضرایب واحدها در کمیت‌ها بکار می روند و بجز برای کمیت ها معنایی نخواهند داشت. معمول کمیت های فیزیکی مطابق جدول زیرند:

کمیت	واحد	نماد در SI	واحد	نماد در cgs
زمان	ثانیه	s	ثانیه	s
طول	متر	m	سانتیمتر	cm
جرم	کیلوگرم	kg	گرم	gr
مقدار ماده	مول	mol	مول	mol
دمای ترمودینامیکی	کلوین	K	کلوین	K
جریان الکتریکی	آمپر	A	آمپر	A
شدت نور	کاندلا	cd	کاندلا	cd

واحدهای بزرگی هم در نجوم استفاده می شود مانند **سال نوری** ly و آن مسافتی است که نور در یک سال طی می کند و برابرست با

$$۱ly = ۳ \times ۱۰^{۵}\frac{km}{s} \times ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۶۰ \times ۶۰s = ۹/۵ \times ۱۰^{۱۲}km = ۹/۵ \times ۱۰^{۱۵}m$$

و همچنین **پارسِک** Pc که برابر ۳/۲۶ سال نوری است.

مثال ۷.۲ (نجوم) فاصلهٔ ستارهٔ کرکس[3] از زمین برابر ۵ پارسک است. این فاصله برحسب کیلومتر چقدر است؟

حل. طبق تبدیل بالا

$$d_{Altair} = ۵Pc = ۵ \times ۳/۲۶ly = ۱۶/۳ \times ۹/۵ \times ۱۰^{۱۲}km = ۱/۵۵ \times ۱۰^{۱۴}km$$

[3] $Altair$

مثال ۸.۲ (**زیست**) بسیاری از گونه های گیاهی بر اثر پرتوگیری کوتاه ولی شدید ماوراء بنفش با فرکانس $\nu = ۲/۴۵GHz$ کشته می شوند. می خواهیم طول موج این نوع اشعه را برحسب سانتیمتر بیابیم. از فرمول $c = \lambda\nu$ می نویسیم:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{c}{\nu} \\ &= \frac{۳ \times ۱۰^{۵}\frac{km}{s}}{۲/۴۵ \times ۱۰^{۹}\frac{1}{s}} \\ &= ۱/۲۲۵ \times ۱۰^{-۴}km \\ &= ۱/۲۲۵ \times ۱۰^{-۴} \times ۱۰^{۳} \times ۱۰^{۲}cm \\ &= ۱۲/۲۵cm \end{aligned}$$

مثال ۹.۲ (**فیزیک**) طبق نسبیت خاص هرگاه جسمی با سرعتی نزدیک به سرعت نور حرکت کند از دید یک ناظر از طول آن کاسته می شود. اگر طول اولیهٔ جسم $l_۰$ بوده و با سرعت v حرکت کند از دید ناظر طول آن برابر $l = l_۰\sqrt{۱ - \frac{v^۲}{c^۲}}$ دیده خواهد شد. برای جسمی یک متری که با سرعت ۲۷۰ هزار کیلومتر بر ثانیه حرکت می کند طول $۴۴cm$ بنظر می رسد، زیرا

$$\begin{aligned} l &= l_۰\sqrt{۱ - \frac{v^۲}{c^۲}} \\ &= ۱m\sqrt{۱ - \frac{(۲۷۰۰۰۰\frac{km}{s})^۲}{(۳۰۰۰۰۰\frac{km}{s})^۲}} \\ &= \sqrt{۱ - ۰/۸۱}\ m \\ &= \sqrt{۰/۱۹}\ m \\ &\sim ۴۴\ cm \end{aligned}$$

(**شیمی**) اگر غلظت ماده ای مثل A را با $[A]$ نشان دهیم، برای واکنشی مانند $A+B \to C+D$ مقدار ثابت یونش عبارتست از $k_a = \frac{[C][D]}{[A][B]}$.

مثال ۱۰.۲ غلظت یون هیدروژن در یک محلول $۰/۱M$ اسید ضعیف HX مقداری برابر با $[H^+] = ۵/۰ \times ۱۰^{-۴}M$ دارد. ثابت یونش HX چقدر است؟

حل. چون $HX \rightleftarrows H^+ + X^-$ و محلول فقط از HX بدست آمده پس

$$[H^+] = [X^-] = ۵/۰ \times ۱۰^{-۴}M$$

غلظت HX در محلول، برابر $۰/۱M$ است و بنابراین مقدار ثابت یونش برابرست با

$$k_a = \frac{[H^+][X^-]}{[HX]} = \frac{(۵/۰ \times ۱۰^{-۴})^۲}{۱/۰ \times ۱۰^{-۱}} = ۲/۵ \times ۱۰^{-۶}$$

مثال ۱۱.۲ (زیست) ظرفیت اکسیژن خون پستانداران حدود ۲۰۰ میلی لیتر در هر لیتر خون است که اگر این مقدار اکسیژن بطور کامل مصرف شود مقدار ۱ کیلوکالری انرژی تولید کرده و حرارت خون را ۱ درجه سانتیگراد بالا می برد. مردی ۷۰ کیلوگرمی با مصرف تمام اکسیژن موجود در ۳/۵ لیتر خون خود، چند متر می تواند صعود کند؟($۱Cal = ۴/۲j$)

حل. با مصرف اکسیژن خون این مرد، مقدار $W = ۳/۵ \times ۴/۲kj = ۱۴/۷ \times ۱۰^۳ j$ انرژی تولید شده که صرف صعود وی می گردد. برای بالا رفتن h متر، باید مقدار انرژی پتانسیلی برابر با

$$W = mgh = ۷۰ \times ۹/۸۱ \times h\frac{j}{m} = ۶۸۶/۷h\frac{j}{m}$$

بدست بیاورد پس $۶۸۶/۷h\frac{j}{m} = ۱۴/۷ \times ۱۰^۳ j$ و $h \sim ۲۱m$ مقدار حداکثر صعودی است که وی می تواند انجام دهد و بدین ترتیب در هر ۲۱ متر، بدن باید اکسیژن خود را احیا نماید.

تمرین ۴.۲ تکمیلی.

۱) عبارات زیر را ساده کنید.

$$(a)\quad \frac{۲۰۴۸ \times ۲^۹ \times ۳^۷ \times ۴^۲ \div ۳^۵ \times (۲^{-۲})^۵ \times ۶}{۳^۳ \times ۴^{۱۱} \times ۲^۲}$$

$$(b)\quad ۴\sqrt{۵} - ۹\sqrt{۸۰} + ۲\sqrt{۴۵}$$

$$(c)\quad \frac{۳^۴ \times ۴^۴ \times ۸^۳ \times ۲^{-۵}}{۳^۶ \times (۴^{-۲})^۲} \div \frac{۲^۴ \times ۳^{-۵}}{۳^۷ \times ۸^{-۶}}$$

$$(d)\quad \sqrt[۵]{۹۰۰\sqrt[۴]{\frac{۱۶ \times ۸۱}{۶۲۵}} \times \sqrt[۳]{\frac{۸ \times ۲۷}{۱۲۵}} \times \sqrt[۲]{\frac{۴ \times ۹}{۲۵}}}$$

$$(e)\quad \frac{۱}{۱! \times ۹!} + \frac{۱}{۳! \times ۷!} + \frac{۱}{۵! \times ۵!} + \frac{۱}{۷! \times ۳!} + \frac{۱}{۹! \times ۱!}$$

$$(f)\quad \left[۶/۲ + ۳\frac{۹}{۱۶} \div \left(\frac{۲/۷۵}{۱۴ \div \frac{۲}{۷} - ۲/۵ \div \frac{۱}{۱۸}} - \frac{۷}{۲۴}\right)\right] \div ۱۲/\overline{۶}$$

$$(g)\quad ۷\frac{۱}{۲} + ۶/۸\overline{۳} + ۵/\overline{۶} + \frac{۱۳/۷۵ + ۱۲\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲} + ۰/۰۶۲۵} - \frac{\frac{۲}{۹} + ۳/۶\overline{۱}}{۱/۹۱\overline{۶} - ۱\frac{۵}{۶}}$$

$$(h)\quad \frac{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵}}{\frac{۴}{۵} - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲}} - \frac{\frac{۱}{۳} - \frac{۳}{۵}}{\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} - ۱} \quad , \quad (i)\quad \frac{\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵}}{\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}} - \frac{\frac{۱}{۴} - \frac{۳}{۵}}{\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}}$$

$$(j)\quad \frac{۳^۴ \times ۳^{۱۰} \times \sqrt[۵]{۹} \times \sqrt[۴]{۲۷^۶} \times ۳^{-۲}}{\sqrt[۵]{۳} \times \sqrt[۳]{۲۷^۲} \times ۳^{-۴}.\sqrt[۱۰]{۳^{۵۷}} \times ۲۷^۴} \quad , \quad (k)\quad \frac{۲^۷.۱۶^۶.\sqrt[۵]{۴}.۸^۵.\sqrt[۴]{۱۶^۳}}{۴^{۱۶}.\sqrt[۵]{۲^۲}.\sqrt[۳]{۶۴^۲}.۲^{-۴}.۸^۶}$$

۲) مخرج عبارات زیر را گویا نمائید.

$$(l)\ \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} \quad , \quad (m)\ \frac{۳}{۴\sqrt{۳}} \quad , \quad (n)\ \frac{۳\sqrt{۲}}{۷\sqrt[۵]{۱۲}} \quad , \quad (o)\ \frac{۱}{۴\sqrt[۷]{۲\sqrt{۳}}} \quad , \quad (p)\ \sqrt{\frac{۲۰ - \sqrt{۵}}{۳\sqrt{۸}}}$$

۳) حاصل عبارت $\frac{7^4 \times 5^7 \times 3^3}{(15)^3}$ را بصورت یک عدد تواندار بنویسید.

۴) **(شیمی)** غلظت H^+ در یک محلول $0/1M$ اسیداستیک که نسبت به سدیم استات آن $NaC_2H_3O_2$ است را بدست آورید.

۵) **(شیمی)** در یونش آب، غلظت $H^+(aq)$ و $OH^-(aq)$ در (الف) محلول $0/015M$ HNO_3 و (ب) محلول $0/0025$ مولار $Ba(OH)_2$ چقدر است.

۶) **(شیمی)** در یونش آب، غلظت $H^+(aq)$ و $OH^-(aq)$ در (الف) محلول $0/0003M$ HCl و (ب) محلول $0/016$ مولار $Ca(OH)_2$ چقدر است.

۷) **(نجوم)** واحد دیگری که در نجوم بکار می برند، **واحد نجومی** AU است که برابر فاصلهٔ متوسط زمین و خورشید بوده و حدود ۱۵۰ میلیون کیلومتر است. هر سال نوری و هر پارسک چند واحد نجومی است؟ چقدر طول می کشد تا نور از خورشید به چشم به برسد؟

۸) **(نجوم)** نزدیکترین ستاره به ما آلفای قنطورس[۴] نام دارد که حدود ۴/۳ سال نوری از ما فاصله دارد. فاصلهٔ آلفای قنطورس از ما چند پارسک و چند واحد نجومی است؟

۹) **(نجوم)** نوری که از ستارگان دریافت می کنیم مدتها قبل از آنها ساطع شده است و حتی ممکن است مربوط به قرنها قبل باشد. نوری که اکنون از ستارهٔ نسر واقع[۵] (با فاصلهٔ $2/52 \times 10^{14}km$) و ستارهٔ ابط الجوزا[۶] (با فاصلهٔ ۵۲۰ سال نوری) ساطع شده چند سال قبل از ستاره خارج شده است.

۱۰) **(زیست)** کار مکانیکی حاصل از تلمبه زدن مقدار ۱۰۰ میلی لیتر خون در سیستم رگها که تحت فشار تقریباً ۱۰۰ میلی متر جیوه انجام می گیرد برابرست با ۱/۳۲ ژول. این مقدار انرژی بوسیلهٔ اصطکاک به حرارت تبدیل می شود. این افزایش حرارت چقدر است؟

۱۱) **(فیزیک)** طبق قانون دوم نیوتن بین هر دو جسم با جرم های m_{kg} و M_{kg} در فاصلهٔ r_m نیروئی برابر $F = \mathbf{G}\frac{mM}{r^2}N$ حمکفرماست. اگر جرم زمین $5/9736 \times 10^{24}kg$ و جرم خورشید برابر $1/989 \times 10^{30}kg$ و فاصلهٔ مرکز آنها $149/6 \times 10^6km$ باشد چند نیوتن بهم نیرو وارد می کنند؟ (ثابت گرانش $\mathbf{G} = 6/67 \times 10^{-11}\frac{m^3}{s^2kg}$)

۱۲) **(زیست)** یاخته های بافتهای زنده تقریباً به یک اندازه اند. اگر طول یاخته نوعاً حدود ۳ میکرومتر باشد در یک بافت با حجم ۱ سانتی متر مربع چند یاخته می تواند قرار داشته باشد.

[۴] $\alpha - Centauri$
[۵] $\alpha - Lyra$
[۶] $\alpha - Orion$

فصل ۳

متغیرهای حقیقی

در مجموعه ها دیدیم که گاهی اوقات نوشتن اعضاء کاری بس دشوار و در برخی موارد کسل کننده یا حتی ناممکن است و بدینگونه تعریفی ریاضی مجموعه را ارائه نمودیم. اکثر اوقات در ریاضیات لازم است که بجای استفاده از اعداد، متغیری را در نظر گرفته و رفتار متغیر دیگری وابسته به آن سنجیده شود. مزیت اینکار همانند نمایش شکل ریاضی یک مجموعه و نمایش عضوی مجموعه است. در اینجا نیز بجای کار با اعداد که مصداقند از متغیرها که شامل یک طیف وسیع از اعدادست استفاده خواهیم نمود.

۱.۳ متغیرهای جبری

متغیر، علامتی است که جانشین یک یا چند عدد می شود. متغیر را معمولاً با حروف کوچک انگلیسی مانند $x, y, z, \cdots$ نشان می دهیم. عبارت $۲x$ حاصل ضرب عدد دو در متغیر x است که این متغیر می تواند شامل هر عددی حقیقی شود. بهمین صورت عبارت $x^۳ - ۱$ حاصل مکعب متغیر x منهای یک است که متغیر x می تواند هر عدد حقیقی دلخواهی باشد. اکنون کار با متغیرها را می آموزیم.

۱.۱.۳ عبارات جبری

عبارتی متشکل از یک عدد و حاصلضرب یک یا چند متغیر را **یک جمله‌ای** گوئیم. یک جمله‌ای های زیر را ببینید:

$$۲x \quad , \quad x^۲ \quad , \quad ۵xy \quad , \quad ۴xz \quad , \quad ۲۰x^۳yzt$$

مجموع چند یک جمله ای، یک **چند جمله‌ای** تشکیل می دهد و توان متغیرهای چندجمله ای بایستی اعداد طبیعی باشند. مثلاً جمع و یا تفاضل یک جمله‌ای های بالا برابر است با

$$۲x + x^۲ - ۵xy + ۴xz - ۲۰x^۳yzt$$

که یک پنج جمله‌ای است. یک چند جمله‌ای می تواند دارای متغیرهای زیادی باشد و بدیهی است که هر چند جمله‌ای با تعداد جملاتش شناخته می شود. در هر چند جمله‌ای، درجه نسبت به هر یک از متغیرها بزرگترین درجه آن متغیر است. درجه هر جمله نسبت همه متغیرها بزرگترین درجه آن متغیر است. به عنوان مثال در چند جمله‌ای $۲x^۲y + ۴xz^۵ - ۳x^۲y^۵z^۷$ درجه نسبت به x برابر ۲، درجه نسبت به y برابر ۵ و درجه نسبت به z برابر ۷ است. درجه نسبت به همه متغیرها برابر ۱۴ است. بدین ترتیب گوئیم این عبارت یک سه جمله‌ای درجه ۱۴ است.

عبارت جبری عبارتی است که در آن چند یک جمله‌ای با چهار عمل اصلی و توان و رادیکال به هم مربوط شده‌اند. مثلاً عبارت جبری

$$۲x^۳ - ۴\sqrt{xy} + \frac{۳}{z} + ۲$$

عملیات ریاضی روی عبارات جبری، مانند اعداد حقیقی است و توان و رادیکال نیز دارای همان قوانین بخشهای ۲.۱.۲ و ۲.۲ هستند. مجموعه مقادیری که می توانند جانشین متغیرهای آن عبارت شوند، **دامنه عبارت جبری** نامیده می شود. در عبارات جبری بالا دامنه عبارتست از همهٔ اعداد حقیقی که $xy > ۰$ و $z \neq ۰$ است. همچنین هر عبارت کسری با مخرج صفر، عبارتی **نامعین** است که از لحاظ ریاضی تعریف نشده است.

مثال ۱.۳ عبارات جبری $\frac{(۲ab^۲c)^۳ \times bc^۴}{۸a^۲b^۵c^۲ \times a^۲}$ را ساده کنید.

$$\begin{aligned}
\frac{(۲ab^۲c)^۳ \times bc^۴}{۸a^۲b^۵c^۲ \times a^۲} &= \frac{۲^۳a^۳(b^۲)^۳c^۳ \times bc^۴}{۸a^۲b^۵c^۲ \times a^۲} \\
&= \frac{۸a^۳b^۷c^۷}{۸a^۴b^۵c^۲} \\
&= \frac{b^۲c^۵}{a}
\end{aligned}$$

۲.۱.۳ فاکتورگیری

با روش فاکتورگیری که آشنا هستید. در این روش از بین جملات یک چند جمله‌ای، مقدار مشترکی را که در همهٔ جملات وجود دارد در نظر گرفته و آن را از تک تک جملات برمی‌داریم. بطور مثال در سه جمله‌ای $3a^3 + 12a^5b - 30da^4$ بطور مشخص مقدار a^3 در تمام جملات دیده می شود. علاوه براین ضرایب هر سه جمله بر عدد ۳ قابل قسمتند. بنابراین فاکتور مشترک در این چند جمله ای مقدار $3a^3$ خواهد بود و می نویسیم:

$$3a^3 + 12a^5b - 30da^4 = 3a^3(1 + 4a^2b - 10da)$$

از فاکتورگیری برای تجزیهٔ چندجمله‌ای ها استفاده می شود. بنظر شما فاکتور عبارات زیر چه خواهد بود؟

$$5a^2xy + 10xaby^2 - 20dxy^5a^4 \qquad , \qquad 12x^2z^3 + 20x^5z^4 - 8z^2x^4$$

۳.۱.۳ اتحادها

اکنون عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

در اینجا برعکس حالت فاکتورگیری، جملات را ضرب کرده و عبارت را ساده نموده‌ایم. به چنین عبارتی که همیشه دو طرفش (بازای هر مقداری از متغیرها) برابر است، **اتحاد** می گوئیم. اتحادها را بطور خلاصه می توان بصورت زیر دسته بندی نمود.

(۱) مربع مجموع دوجمله‌ای $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(۲) مربع تفاضل دوجمله‌ای $\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(۳) مکعب مجموع دوجمله‌ای $\quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(۴) مکعب تفاضل دوجمله‌ای $\quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(۵) اتحاد مزدوج $\quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

(٦) مجموع مکعب ها $\quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

(۷) تفاضل مکعب ها $\quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

(۸) اتحاد جمله مشترک $\quad (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

مثال ۲.۳ مثال های زیر را ببینید:

$$\begin{aligned}
(a+3)^2 &= a^2+6a+9\\
(x-r)^2 &= x^2-2xr+r^2\\
(e+2)^3 &= e^3+6e^2+12e+8\\
(a-x)^3 &= a^3-3a^2x+3ax^2-x^3\\
a^2-3^2 &= (a-3)(a+3)\\
a^3+4^3 &= (a+4)(a^2-4a+16)\\
z^3-8 &= (z-2)(z^2+2z+4)\\
(x+3)(x+4) &= x^2+7x+12
\end{aligned}$$

از اتحادها می توان برای تجزیهٔ عبارات جبری بهره برد:

مثال ۳.۳ با استفاده از روش فاکتورگیری و اتحادها، عبارت زیر را ساده کنید.

$$\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}\times\frac{x^3+x^2y}{x^2-xy}$$

حل. با استفاده از فاکتورگیری و اتحادها می نویسیم:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}\times\frac{x^3+x^2y}{x^2-xy} &= \frac{(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}\times\frac{x^2(x+y)}{x(x-y)}\\
&= \frac{(x-y)}{(x+y)}\times\frac{x(x+y)}{(x-y)}\\
&= x
\end{aligned}$$

مثال ۴.۳ عبارت زیر را ساده نمائید.

$$\frac{x^3-y^3}{x^3+x^2y+xy^2}\times\frac{x^3y+x^2y^2}{x^2-y^2}$$

حل. با استفاده از فاکتورگیری و اتحادها داریم:

$$\frac{x^3-y^3}{x^3+x^2y+xy^2}\times\frac{x^3y+x^2y^2}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x(x^2+xy+y^2)}\times\frac{x^2y(x+y)}{(x+y)(x-y)}=xy$$

مانند اتحادهای مربع و مکعب دوجمله‌ای، می توان های اتحادهائی با توان های بیشتر از ۳ را نوشت. برای اینکار ضرایب را بکمک **مثلث خیام–نیوتن** بشکل زیر می یابیم. در این مثلث، عدد هر سطر از مجموع دو عدد فوق آن حاصل شده و اعداد یک در طرفین ثابت هستند.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & ۱ & & & & & \\ & & & & ۱ & & ۱ & & & & \\ & & & ۱ & & ۲ & & ۱ & & & \\ & & ۱ & & ۳ & & ۳ & & ۱ & & \\ & ۱ & & ۴ & & ۶ & & ۴ & & ۱ & \\ ۱ & & ۵ & & ۱۰ & & ۱۰ & & ۵ & & ۱ \\ & & & & & \cdots & & & & & \end{array}$$

مثلاً برای نوشتن اتحاد $(a+b)^۵$، با بکار بردن اعداد سطر آخر بعنوان ضرایب، با شروع توان $a^۵$ هر بار یکی از توان آن کاسته و بر توان b اضافه می کنیم تا b نیز به توان ۵ برسد. حاصل اتحاد چنین است:

$$(a+b)^۵ = a^۵ + ۵a^۴b + ۱۰a^۳b^۲ + ۱۰a^۲b^۳ + ۵ab^۴ + b^۵$$

به این روش **بسط دوجمله‌ای** نیز گوئیم. با ادامهٔ مثلث خیام—نیوتن اتحاد $(a+b)^۷$ را بنویسید.

از کاربردهای دیگر اتحادها، **تجزیهٔ کسرها** است. در مثال زیر کسری با مخرج سه جمله‌ای به دو کسر مجزا تجزیه شده است. ببینید:

مثال ۵.۳ مقادیر A و B را چنان بیابید که اتحاد زیر برقرار باشند.

$$\frac{۵x+۷}{x^۲+۴x-۵} \equiv \frac{A}{x-۱} + \frac{B}{x+۵}$$

حل. از دو عامل طرف راست مخرج مشترک گرفته و چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{۵x+۷}{x^۲+۴x-۵} &\equiv \frac{A}{x-۱} + \frac{B}{x+۵} \\ &\equiv \frac{Ax+۵A+Bx-B}{(x-۱)(x+۵)} \\ &\equiv \frac{(A+B)x+(۵A-B)}{x^۲+۴x-۵} \end{aligned}$$

مخرجها مساویند و بایستی صورتها نیز مساوی باشند. برای اینکار ضرایب x را در صورت برابر قرار داده و ضرایب ثابت را نیز مساوی قرار می دهیم، سپس

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B=۵, \\ ۵A-B=۷. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=۲, \\ B=۳. \end{array} \right.$$

همچنین با اتحادها می توان مخرج عبارات جبری حاوی رادیکال را گویا نمود. برای مثال

$$\begin{aligned} \frac{۴}{\sqrt{۵}-۲} &= \frac{۴}{\sqrt{۵}-۲} \times \frac{\sqrt{۵}+۲}{\sqrt{۵}+۲} = \frac{۴(\sqrt{۵}+۲)}{\sqrt{۵^۲}-۲^۲} = ۴(\sqrt{۵}+۲) \\ \frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۲}} &= \frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۲}} \times \frac{\sqrt[۳]{۵^۲}-\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۲^۲}}{\sqrt[۳]{۵^۲}-\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۲^۲}} = \frac{(۲\sqrt{۲})(\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۴})}{۳} \end{aligned}$$

تمرین ۱.۳ .

۱) عبارات جبری زیر را ساده کنید.

$$(a)\ \frac{12xy^2\times(x^3y^2)^3}{6x^9y^7}\quad,\quad(b)\ \frac{(2a^2c)^4\times b^2c^6}{48a^5b^4c^{10}\times 5a^3b^2}\quad,\quad(c)\ \frac{14x^3ty^3\times(t^3xy^2)^2}{21t^3x^4y^5\times(ytx)^3}$$

۲) با استفاده از اتحادها حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$(a)\ (x-\frac{1}{2})^2\quad,\quad(b)\ (x+4)(x^2-4x+16)\quad,\quad(c)\ (x+7)(x-4)$$

$$(d)\ (\frac{x}{4}+5)(\frac{x}{4}-5)\quad,\quad(e)\ (x-3)(x^2+3x+9)\quad,\quad(f)\ (2x+\frac{4}{3})^2$$

۳) چندجمله‌ای های زیر را تجزیه کنید.

$$(a)\ x^3-4x\ ,\ (b)\ y^3+8\ ,\ (c)\ x^3+7x^2+6x\ ,\ (d)\ 2x^2-5x-12$$

$$(e)\ z^4-16\ ,\ (f)\ 4x^4+y^4\ ,\ (g)\ 2x^2+2x-4\ ,\ (h)\ 4x^3y^2z-9xz$$

۴) عبارات زیر را ساده کنید.

$$(a)\ \frac{x^2+x}{x^2-1}\quad,\quad(b)\ \frac{x^3-x}{2x^2-2x}\quad,\quad(c)\ \frac{x^4-1}{(2x^2+2)(x+1)}$$

$$(d)\ \frac{(x-y)^2}{x^3-y^3}\quad,\quad(e)\ (x+1)^3-(x-1)^3\quad,\quad(f)\ \frac{4x^2-4x(y^3+x)}{xy}$$

$$(g)\ \frac{2x^2+x}{5y+10xy}\quad,\quad(h)\ \frac{x+1}{x^2+2x+1}\quad,\quad(i)\ \frac{x^2+3x}{7x}\div\frac{x^2-9}{x-3}$$

۵) عبارات کسری زیر را گویا نمائید.

$$(a)\ \frac{1}{\sqrt{2}+1}\quad,\quad(b)\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\quad,\quad(c)\ \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}\quad,\quad(d)\ \frac{6}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$

$$(e)\ \frac{5}{\sqrt{x}+1}\quad,\quad(f)\ \frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\quad,\quad(g)\ \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x}}\quad,\quad(h)\ \frac{1}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5}}$$

۶) بسط دوجمله ای $(a+b)^9$ را با استفاده از مثلث خیام–نیوتن بنویسید. با جایگذاری $a=2x$ و $b=3y$ بسط $(2x+3y)^9$ را نوشته و ضریب جملهٔ سوم در این بسط را بیابید؟

۷) ضریب جمله پنجم در بسط $(4x-2z)^{10}$ چیست؟

۳.۲ معادلات و نامعادلات

وقتی دو عبارت جبری با هم برابر می شوند گوئیم معادله تشکیل شده اشت. معادلهٔ ایجاد شده ممکن است برای برخی مقادیر درست باشد. هدف ما، یافتن عددی است که اگر بجای x قرار گیرد، معادله برقرار شود. این عدد را **ریشهٔ معادله** گوئیم. در این بخش به حل معادلات و نامعادلات می پردازیم که خواه و ناخواه در اکثر عملیات ریاضی ظاهر می شوند و دارای مجموعه جواب های گوناگونی می باشند. یک معادله می تواند جواب نداشته یا تعدادی متناهی یا نامتناهی جواب داشته باشد.

۳.۲.۱ معادلهٔ درجه اول

معادلهٔ درجه اول بصورت $ax+b=0$ بیان می شود که در آن a و b ضرایب ثابتی هستند و a صفر نیست. معادلهٔ $2x+4=0$ را در نظر بگیرید. با جایگذاری $x=-2$، معادله برابر صفر می شود پس -2 ریشهٔ معادله است. هر معادلهٔ درجهٔ اول دقیقاً دارای یک ریشه است. ریشهٔ معادلهٔ درجه اول $ax+b=0$ عبارتست از $x=-\frac{b}{a}$.

۳.۲.۲ معادلهٔ درجه دوم

این معادله بصورت $ax^2+bx+c=0$ بیان می شود که در آن a,b,c ضرایب ثابتی هستند و $a\neq 0$، مثل معادلهٔ $x^2-5x+6=0$. هر معادلهٔ درجهٔ دوم حداکثر دارای دو ریشه است. برای یافتن ریشه‌های معادله درجه دوم ابتدا باید مقدار **دلتا** یا **مبین** را که برابر با $\Delta=b^2-4ac$ است، پیدا کنیم و سپس ریشه ها را از فرمول های زیر بدست می آوریم:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

مثال ۳.۶ ریشه های معادلهٔ درجه دوم $2x^2-3x-20=0$ را به روش دلتا بیابید.

حل. در این معادله داریم $a=2 \ , \ b=-3 \ , \ c=-20$ بنابراین

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4(2)(-20)=9+160=169$$

و ریشه‌ها چنین خواهند بود:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-3)+\sqrt{169}}{2\times 2}=\frac{3+13}{4}=4 \\ x_2 &= \frac{-(-3)-\sqrt{169}}{2\times 2}=\frac{3-13}{4}=-2/5 \end{aligned}$$

مطلب ۱.۳ در این نوع معادله سه حالت بر حسب Δ اتفاق می افتد:
۱) $\Delta > ۰$ معادله دقیقاً دو ریشه دارد. این دو ریشه همان $x_۱$ و $x_۲$ مذکور در فوق هستند.
۲) $\Delta = ۰$ معادله دقیقاً یک ریشه دارد. این **ریشهٔ مضاعف** برابر با $x = \frac{-b}{۲a}$ خواهد بود.
۳) $\Delta < ۰$ معادله دارای **ریشهٔ حقیقی** نیست.

تمرین ۲.۳ معادلات زیر را حل کنید.

$$(a)\quad ۳x - ۲۴ = ۰ \quad , \quad (b)\ \ ۵x - ۱۰ = x - ۳ \quad , \quad (c)\ \ ۲x^۲ + ۷x - ۴ = ۰$$
$$(d)\quad x^۲ - ۱۰x + ۱۶ = ۰ \quad , \quad (e)\ \ ۹x^۲ - ۱ = ۰ \quad , \quad (f)\ \ ۲x^۲ + x - ۱۰ = ۰$$

۳.۲.۳ نامعادلات

دو عبارت جبری که توسط یکی از علامتهای $\geq \ , \ \leq \ , \ < \ , \ >$ بهم مرتبط باشند یک **نامعادله** تشکیل می دهند، مانند $۵x - ۴ \leq ۲x + ۱$

هدف ما یافتن اعدادی است که اگر بجای متغیرهای نامعادله قرار بگیرند، عبارت صحیح بدست آید. چنین مجموعهٔ عددی را **مجموعه جواب نامعادله** نامیم. برای حل نامعادلات از موارد زیر کمک می گیریم:

۱) به دو طرف نامعادله می توان یک مقدار را اضافه یا کم نمود.

۲) در نامعادلات اعداد و متغیرها را می توان از یکطرف بطرف دیگر منتقل کرد و در این انتقال، علامت عدد یا متغیر عوض می شود.

۳) طرفین یک نامعادله را می توان در یک عدد ضرب و یا بر عددی تقسیم کرد. اگر عدد منفی باشد جهت نامعادله عوض میشود ولی اگر عدد مثبت باشد جهت نامعادله عوض نخواهدشد.

۴) اگر طرفین نامعادله را عکس کنیم، جهت نامعادله عوض می شود.

مثال ۷.۳ نامعادلهٔ $۲x - ۳ > ۳x + ۲$ را حل کنید.

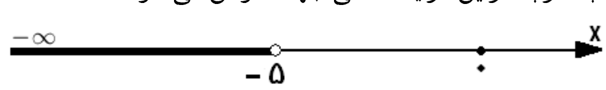
حل.

$$۲x - ۳ > ۳x + ۲$$

انتقال مجهولات بطرف چپ و اعداد طرف راست $\quad ۲x - ۳x > +۲ + ۳$

$$-x > +۵$$

با ضرب طرفین در یک منفی جهت عوض می شود $\quad x < -۵$



شکل ۱.۳ جواب نامعادله مثال ۷.۳

مثال ۸.۳ مطلوبست حل نامعادلهٔ $(x+1)(x+1) \geq x^2 - 4x - 5$.

حل. دو پرانتز طرف چپ را در هم ضرب می کنیم

$$(x+1)(x+1) \geq x^2 - 4x - 5$$

$$x^2 + 2x + 1 \geq x^2 - 4x - 5$$

انتقال مجهولات بطرف چپ و اعداد طرف راست

$$x^2 + 2x - x^2 + 4x \geq -5 - 1$$

طرفین را بر ٦ تقسیم می کنیم

$$6x \geq -6$$

$$x \geq -1$$

شکل ۲.۳ مجموعه جواب نامعادله مثال ۸.۳

یادآوری اینکه برای حل معادلات نیز از روش مشابهی استفاده می کنیم تنها با این تفاوت که علامت در معادله مفهومی ندارد.

۴.۲.۳ تعیین علامت

منظور از علامت یک عبارت، عبارتست از علامت آن بازای متغیر x که یک عدد حقیقی است. می خواهیم علامت عبارت $P = 2x - 1$ را تعیین کنیم. بوضوح برای $x = 2$ مقدار $P = 3$ خواهد بود و علامت P مثبت است و برای $x = 0$ مقدار $P = -1$ خواهد بود که علامت منفی را نشان می دهد. هدف ما تعیین مقادیری است که برای آن ها P مثبت یا منفی می شود. علامت دو جمله‌ای درجه اول چنین است:

مطلب ۲.۳ علامت دوجمله‌ای درجه اول $P = ax + b$ عبارتست از:

$$P = ax + b = 0 \Longrightarrow ax = -b \Longrightarrow x = \frac{-b}{a}$$

x	$-\infty$	کوچکتر از ریشه	$\frac{-b}{a}$	بزرگتر از ریشه	$+\infty$
P		مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

بوضوح بازای ریشهٔ $-\frac{b}{a}$ عبارت P صفر می شود. جدول بالا را **جدول تعیین علامت** نامیم.

مثال ۹.۳ علامت عبارت $P = 2x - 1$ را تعیین کنید.

حل.

$$P = 2x - 1 = 0 \Longrightarrow 2x = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
P		-	0	+	

جدول نشان می دهد که برای $x = 5$ چون $5 > \frac{1}{2}$ می بایست P مثبت باشد.

مطلب ۳.۳ علامت عبارت درجه دوم $P = ax^{۲} + bx + c$ در حالتی که ریشه نداشته باشد و یا یک ریشه داشته باشد، همیشه **موافق علامت** a است. در حالتیکه دو ریشهٔ $x_{۱}$ و $x_{۲}$ داشته باشد، علامت آن بصورت زیر است:

x	$-\infty$		$x_{۱}$	بین دو ریشه	$x_{۲}$		$+\infty$
P		موافق علامتa	۰	مخالف علامتa	۰	موافق علامتa	

مثال ۱۰.۳ بازای چه x هائی $x^{۲} - ۵x + ٦ > ۰$ است؟

$$P = x^{۲} - ۵x + ٦ > ۰ \Longrightarrow \Delta = ۱ > ۰ \Longrightarrow x_{۱} = ۲\ ,\ x_{۲} = ۳$$

x	$-\infty$		۲		۳		$+\infty$
P		+	۰	-	۰	+	

$$\Longrightarrow \text{مجموعه جواب} = (-\infty, ۲) \cup (۳, \infty)$$

زیرا مجموعه جواب تنها شامل نواحی است که عبارت مثبت است.

مثال ۱۱.۳ برای چه x هائی $x^{۲} - ۴x + ۹ > ۰$ خواهد بود؟

$$P = x^{۲} - ۴x + ۹ > ۰ \Longrightarrow \Delta = -۲۰ < ۰$$

و مطابق مطلب۳.۳ علامت P موافق علامت $a = ۱$ و همیشه مثبت خواهد بود، بنابراین

$$\text{مجموعه جواب} = \mathbb{R}$$

مثال ۱۲.۳ نامعادلهٔ روبرو را حل کنید $\dfrac{x+۲}{۲x-۱} < \dfrac{x-۲}{x+۱}$

حل.

$$\begin{aligned}
\frac{x+۲}{۲x-۱} &< \frac{x-۲}{x+۱} \\
\frac{x+۲}{۲x-۱} - \frac{x-۲}{x+۱} &< ۰ \\
\frac{(x+۲)(x+۱) - (x-۲)(۲x-۱)}{(۲x-۱)(x+۱)} &< ۰ \\
\frac{-x^{۲} + ۸x}{۲x^{۲} + x - ۱} &< ۰
\end{aligned}$$

با تعیین علامت صورت و مخرج داریم:

$$P_{۱} = -x^{۲} + ۸x = ۰ \Longrightarrow \Delta = ٦۴ \Longrightarrow x_{۱} = ۰\ ,\ x_{۲} = ۸$$

$$P_{۲} = ۲x^{۲} + x - ۱ = ۰ \Longrightarrow \Delta = ۹ \Longrightarrow x_{۱} = -۱\ ,\ x_{۲} = \frac{۱}{۲}$$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		8		$+\infty$
P_1		-	|	-	∘	+	|	+	∘	-	
P_2		+	∘	-	|	-	∘	+	|	+	
P		-	ن	+	∘	-	ن	+	∘	-	

$$\Longrightarrow \text{مجموعه جواب} = (-\infty, -1) \cup (0, \tfrac{1}{2}) \cup (8, \infty)$$

که حرف «ن» مختصر «نامعین» است، زیرا کسر با مخرج صفر، نامعین و **تعریف نشده** است.

مثال ۱۳.۳ مطلوبست حل نامعادلهٔ روبرو: $\frac{2x+4}{x-1} - \frac{3x}{x+2} \geq 2$

حل.

$$\begin{aligned}
\frac{2x+4}{x-1} - \frac{3x}{x+2} &\geq 2\\
\frac{2x+4}{x-1} - \frac{3x}{x+2} - 2 &\geq 0\\
\frac{(2x+4)(x+2) - 3x(x-1) - 2(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} &\geq 0\\
\frac{-3x^2+9x+12}{(x-1)(x+2)} &\geq 0
\end{aligned}$$

با تعیین علامت صورت و مخرج داریم:

$$P_1 = -3x^2 + 9x + 12 = 0 \Longrightarrow \Delta = 225$$
$$\Longrightarrow x_1 = \frac{-9+\sqrt{225}}{-6}\ ,\ x_2 = \frac{-9-\sqrt{225}}{-6} \Longrightarrow x_1 = -1\ ,\ x_2 = 4$$
$$P_2 = (x-1)(x+2) = 0 \Longrightarrow x_1 = 1\ ,\ x_2 = -2$$

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		∞
P_1		-	|	-	∘	+	|	+	∘	-	
P_2		+	∘	-	|	-	∘	+	|	+	
P		-	ن	+	∘	-	ن	+	∘	-	

$$\Longrightarrow \text{مجموعه جواب} = (-2, -1] \cup (1, 4]$$

نکته انتهائی قابل ذکر این است که یک عبارت جبری را که در یک طرف یک معادله یا نامعادله‌ای واقع است بشرطی می توان ساده نمود که دامنهٔ این عبارت را برای جواب نهائی در نظر بگیریم تا جواب نهائی شامل ریشه های مخرج عبارت اولیه نباشد.

تمرین ۳.۳ نامعادلات زیر را حل کنید.

$(a)\quad 2x+4 \geq x+5 \quad , \quad (b)\quad (x-1)(3x-3) \leq (x-1)(3x+5)$

$(c)\quad (2x-1)(x+2) > 2x^2 \quad , \quad (d)\quad 2x^2 - 5x + 6 \leq (2x-3)(x-2)$

$(e)\quad (x^2-4)(x^2+1) \leq x^4 - 7 \quad , \quad (f)\quad \frac{2x^2+x+1}{x-6} > 2x - 1$

۵.۲.۳ دستگاه معادلات خطی و روش حذفی

منظور از دستگاه خطی دو معادله و دو مجهولی با مجهولات x و y دستگاهی به شکل

$$\begin{cases} ax+by=\alpha, \\ cx+dy=\beta. \end{cases}$$

است و هدف یافتن جواب دستگاه است یعنی اعدادی که در دستگاه بجای مجهولات x و y صدق می کنند. می دانیم با روش های ابتدائی کافیست برای یافتن x و y، یک یا هر دو معادله را در اعدادی چنان ضرب می کنیم که یکی از مجهولات در دو معادله قرینه گردد و سپس معادلات را جمع و مجهولات را بدست می آوریم. این روش به **روش حذف گاوس** معروف است.

در روشی دیگر با استفاده از **روش تبدیلی** ابتدا با استفاده از یک معادله، یکی از مجهولات را بر حسب دیگری یافته و در معادلهٔ دیگر جایگزین می کنیم و بدین ترتیب براحتی معادله حل می گردد. مثال زیر را ببینید.

مثال ۱۴.۳ مطلوبست حل دستگاه زیر با روش تبدیلی.

$$\begin{cases} ۴x-۵y=-۱۱, \\ x+۲y=۷. \end{cases}$$

حل. از معادلهٔ دوم دستگاه مقدار مجهول x عبارتست از $x=۷-۲y$ که با جایگذاری در معادلهٔ نخست داریم:

$$\begin{aligned} ۴x-۵y=-۱۱ \quad &\Longrightarrow \quad ۴(۷-۲y)-۵y=-۱۱ \\ &\quad\quad -۱۳y=-۳۹ \\ &\quad\quad y=۳ \\ x=۷-۲y \quad &\Longrightarrow \quad x=۱ \end{aligned}$$

همچنین با روش تبدیلی قادر به حل دستگاه های چند معادله و چند مجهولی هستیم.

مثال ۱۵.۳ مطلوبست حل دستگاه زیر با روش تبدیلی.

$$\begin{cases} ۲x+۴y+z=-۱, \\ ۳x+۲y-۲z=۱۰, \\ ۲x-y+۳z=۷. \end{cases}$$

حل. از معادلهٔ سوم دستگاه مقدار مجهول y عبارتست از $y=۲x+۳z-۷$ که با جایگذاری در معادلهٔ اول و دوم می نویسیم:

$$\begin{cases} ۲x+۴(۲x+۳z-۷)+z=-۱, \\ ۳x+۲(۲x+۳z-۷)-۲z=۱۰. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۰x+۱۳z=۲۷, \\ ۷x+۴z=۲۴. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۴, \\ y=-۲, \\ z=-۱. \end{cases}$$

تمرین ۴.۳ تکمیلی.

۱) عبارات زیر را ساده کنید.

$$(a)\quad 2(3a^2-4a+5)-6(2a+a^2+5)$$

$$(b)\quad 1+(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$$

$$(c)\quad \frac{4x^4y-32xy}{2x^5z-4x^4z} \quad , \quad (d)\quad \frac{x^2-y^2}{3xy-3y^2}$$

$$(e)\quad 2x^4y+10x^3y+12x^2y \quad , \quad (f)\quad \frac{(x+y)^2}{(2x+2y)^2}$$

$$(g)\quad 1+(x-1)(x^3+x^2+x+1) \quad , \quad (h)\quad \frac{a^3-b^3}{(a^2-b^2)(a^2+ab+b^2)}$$

$$(i)\quad \frac{x^2+3x-4}{x^2-3x-28}\times\frac{2x^2-8x-42}{x^2+2x-3} \quad , \quad (j)\quad \frac{(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)}{2x^3-2y^3}$$

$$(k)\quad \frac{(x+y)(x^2-xy)^2}{3x^3-3xy^2}\times\frac{x^3-x^2y+xy^2}{x^4y+xy^4} \quad , \quad (l)\quad \frac{(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)}{x^3-8y^3}$$

$$(m)\quad \frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}\times\frac{x^2+x-20}{x^2+4x-5}\times\frac{x^2+x-6}{x^2-x-12}$$

۲) حاصل عددی عبارات زیر را بازای مقادیر $x=2$، $y=3$ و $z=-1$ بدست آورید.

$$(a)\quad \frac{x+y+z}{x-y+z} \quad , \quad (b)\quad \sqrt{\frac{x^2+y^2-12z}{x+y}} \quad , \quad (c)\quad \frac{(x+1)(y+1)(z-1)}{\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}}$$

۳) معادلات زیر را حل نمائید.

$$(a)\quad x^2+3x-4=0 \quad , \quad (b)\quad 3x^2-4x+6=0$$

$$(c)\quad 6x^2+6x=0 \quad , \quad (d)\quad 5x^2+x-20=0$$

$$(e)\quad 2x^2=x+5 \quad , \quad (f)\quad (2x+4)(3x+3)=(x+1)(3x+5)$$

$$(g)\quad \sqrt{x}+2=\sqrt{x+2} \quad , \quad (h)\quad x^2-x+6-(2x-3)(x-2)+x=0$$

$$(i)\quad \frac{x(x-1)}{x^2+x}=0 \quad , \quad (j)\quad x(x+2)-3x=x^2+5x-3$$

$$(k)\quad \sqrt[3]{x}+2=\sqrt[3]{x+2} \quad , \quad (l)\quad x^3-3x^2+3x-9=0$$

$$(m)\quad x^4-5x^2+4=0 \quad , \quad (n)\quad x^4+x^2-10x=0$$

۴) نامعادلات زیر را حل کنید.

$$(a)\quad \frac{x+۱}{۲x-۴} \geq \frac{۲x+۱}{x-۵} \quad , \quad (b)\quad \frac{x^۳-۵x}{x^۲-۴x-۴۵} < x$$
$$(c)\quad \frac{۸}{x-۱} < \frac{۳}{x+۴} - ۵ \quad , \quad (d)\quad \frac{x}{x+۱} - \frac{x-۳}{x-۲} \leq ۲$$
$$(e)\quad \frac{x^۲-۲}{(x+۱)^۲} > ۱ \quad , \quad (f)\quad \frac{۵}{x} > \frac{٦}{x-۱}$$
$$(g)\quad \frac{٦x^۳+۵}{(۲x^۲+۲)(x+۱)} < ۳ \quad , \quad (h)\quad ۲x^۲-۵x+٦ \leq (۲x-۳)(x-۲)$$
$$(i)\quad \frac{x-۱}{x+۱} - \frac{x+۲}{x-۲} \leq -۲ \quad , \quad (j)\quad (x-۲)^۲+۲(x+۱) > (x-۵)(x+۳)$$

۵) مخرج عبارات کسری زیر را گویا نمائید.

$$(a)\quad \frac{x+۲}{\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{۲}} \quad , \quad (b)\quad \frac{۴x}{\sqrt[۳]{۳x}-۱} \quad , \quad (c)\quad \frac{y}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}}$$
$$(d)\quad \frac{۱۸}{\sqrt{۷}+\sqrt{٦}+\sqrt{۵}} \quad , \quad (e)\quad \frac{۲}{\sqrt[۴]{۳}+\sqrt[۴]{۲}} \quad , \quad (f)\quad \frac{y-z}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x+z}}$$

٦) با روش تجزیهٔ کسرها، مقادیر A و B و C را چنان بیابید که اتحادهای زیر بازای هر x (بجز ریشهٔ مخرج ها) برقرار باشند.

$$(a)\quad \frac{x+۱}{x^۲-۴} \equiv \frac{A}{x-۲} + \frac{B}{x+۲}$$
$$(b)\quad \frac{۴}{x^۲-۴x-۱۲} \equiv \frac{A}{x+۲} + \frac{B}{x-٦}$$
$$(c)\quad \frac{۵x+۱}{x^۳-۱} \equiv \frac{A}{x-۱} + \frac{Bx+C}{x^۲+x+۱}$$
$$(d)\quad \frac{۵x^۲+۵x-۱۴}{x^۲(x+۷)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x^۲} + \frac{C}{x+۷}$$
$$(e)\quad \frac{۲x+۱}{x^۲-۴x+۳} \equiv \frac{A}{x-۱} + \frac{B}{x-۳}$$
$$(f)\quad \frac{x^۲+۲}{x^۴-۱} \equiv \frac{A}{x-۱} + \frac{B}{x+۱} + \frac{Cx+D}{x^۲+۱}$$

۷) تمام x–هائی را بیابید که بازای آنها مقدار $\sqrt{x^۲+۴x+۵}$ با مفهوم باشد.

۸) تقسیم های زیر را انجام دهید.

$$(x^۳+۵x-۷) \div (x-۱) \quad , \quad (x^۳-۵x^۲-٦x+۱٦) \div (x+۲)$$

۹) معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}=1$$

۱۰) دستگاه های زیر را حل نمائید.

$$(a)\quad \begin{cases} 2x-4y=-6, \\ x+5y=25. \end{cases} \quad , \quad (b)\quad \begin{cases} 2x+3y+z=1, \\ x+4y+2z=1, \\ 5x-y-3z=2. \end{cases}$$

$$(c)\quad \begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=4, \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=-7. \end{cases} \quad , \quad (d)\quad \begin{cases} \dfrac{4}{3x+1}+\dfrac{3}{y-1}=2, \\ \dfrac{1}{3x+1}-\dfrac{2}{y-1}=6. \end{cases}$$

$$(e)\quad \begin{cases} 3x+2y>5, \\ x+y=1. \end{cases} \quad , \quad (f)\quad \begin{cases} x-y<4, \\ 2x+4y\geq 2. \end{cases}$$

$$(g)\quad \begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=3, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7. \end{cases} \quad , \quad (h)\quad \begin{cases} x^2+2y=5, \\ -3x^2+y=1. \end{cases}$$

۱۱) جملهٔ چهارم بسط $(2xy-5x)^{11}$ چیست؟

۱۲) مقدار a را چنان بیابید که معادلهٔ $x^2-4ax+4=0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

۱۳) معادلات زیر را برای n صحیح حل کنید.

$$(a)\quad \frac{(n+2)!}{n!}=20 \quad , \quad (b)\quad \frac{(n-1)!}{(n-3)!}=42\ , \quad (c)\quad \frac{n!}{2(n-2)!}=6$$

$$(d)\quad \frac{2(n+1)n!}{(n-1)!}=24\ , \quad (e)\quad n!-2(n-2)!=20$$

۱۴) دهقانی که از ده خود به ایستگاه راه آهن می رفت در ساعت اول ۳ کیلومتر را طی کرد ولی حساب کرد که اگر با همین سرعت برود ۴۰ دقیقه بعد از ورود قطار به ایستگاه می‌رسد. بهمین خاطر بقیه راه را با سرعت ۴ کیلومتر بر ساعت طی کرد و ۴۵ دقیقه قبل از ورود قطار به ایستگاه رسید. فاصلهٔ ده تا ایستگاه را پیدا کنید.

۱۵) آلیاژی از دو فلز به نسبت ۲ : ۱ و آلیاژ دیگری از همان فلزات به نسبت ۳ : ۲ تشکیل شده است. به چه نسبتی این دو آلیاژ را با هم مخلوط کنیم تا آلیاژی از این فلزات به نسبت ۲۷ : ۱۷ بدست آید.

۱۶) توپی پس از برخورد با زمین باندازهٔ $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع رها شده بطرف بالا بر می گردد. اگر این توپ را از ارتفاع ۸/۱ متری بطرف زمین رها کنیم، پس از چند بار برخورد با زمین به ارتفاع ۱/۶ متری زمین بر می گردد.

۱۷) **(اقتصاد)** مجموع دو سرمایه مساوی ۱۰ میلیون تومان است. اگر نرخ بهره هر سرمایه مساوی یک هزارم همان سرمایه باشد و مجموع بهرهٔ دو سرمایه در یکسال برابر ۵۸۰ هزار تومان شود، هر یک از دو سرمایه چقدر بوده است؟

۱۸) **(شیمی)** دو محلول اسیدسولفوریک داریم که در اولی ۸۰۰ گرم و در دومی ۶۰۰ گرم اسید خالص وجود دارد. این دو محلول را با هم مخلوط کرده و ۱۰ کیلوگرم محلول اسید سولفوریک بدست آورده ایم. وزن هر یک از محلولها را پیدا کنید بشرطی که بدانیم در محلول اول ۱۰ درصد بیش از دومی اسید سولفوریک خالص وجود داشته است.

۱۹) **(اقتصاد)** اضافه تولید یک کارخانه نسبت به سال قبل ۱۰ درصد و در سال دوم ۲۰ درصد بوده است. اضافه تولید در سال سوم چند درصد باشد تا متوسط اضافه تولید در سه سال ۳۱ درصد شود.

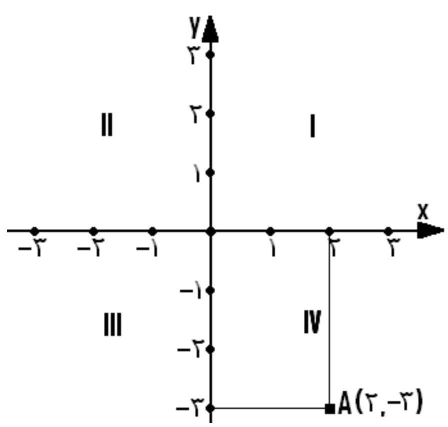
۲۰) **(فیزیک)** پرنده ای فاصلهٔ ۴۰ کیلومتری را در خلاف جهت باد پرواز می کند و سپس همان فاصله را بر می گردد. اگر رفت و برگشت پرنده ۲/۵ ساعت طول کشیده باشد و سرعت باد هم ۳۰ کیلومتر در ساعت باشد سرعت پرنده را در هوای آرام بیابید.

فصل ۴

خط و صفحه

۱.۴ صفحه مختصات دکارتی

دو محور را در نظر بگیرد که در نقطه مبدأشان بر هم منطبقند. لازم نیست بر هم عمود باشند و یا واحد طول روی آنها یکسان باشد ولی بهتر است آنها را عمود بر هم و واحدهای آنها را یکی بگیرید[۱]. این دو محور تشکیل صفحهٔ مختصات دکارتی می دهند. دستگاه مختصات، صفحه را به چهار ناحیه یا ربع تقسیم می کند، ربع اول I، ربع دوم II، ربع سوم III، ربع چهارم IV.



شکل ۱.۴ صفحه مختصات دکارتی و نمایش نقطه A

[۱]– در محاسبات ریاضی بهتر است واحد طول دو محور یکی باشد ولی ممکن است در محاسبات علمی، چنانچه قصد سنجش دو کمیت مختلف را داریم ایندو یکی نبوده و بنابراین واحدهای دو محور از نظر نوع و مقدار متفاوت ها خواهند بود. مثل اینکه بخواهیم شدت زلزله را بسنجیم که یکی محور انرژی و دیگری بر حسب ریشتر است.

هر نقطه در این صفحه دارای دو مختص است که آنها را روی دو محور بترتیب در نظر می‌گیریم مثلاً $A(+۲,-۳)$ که عدد اول را طول نقطه و عدد دوم را عرض نقطه نامیم. در هر زوج مرتب (x,y)، x را مختص اول و y را مختص دوم گوئیم. برای رسم نقطهٔ A روی صفحه از محور x-ها ۲ واحد و از طرف منفی محور عرضها ۳ واحد جدا کرده و A را مشخص می کنیم [۲].

مطلب ۱.۴ اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ دو نقطه مفروض در صفحهٔ مختصات دکارتی باشند، فاصلهٔ بین A و B را چنین تعریف می کنیم:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$$

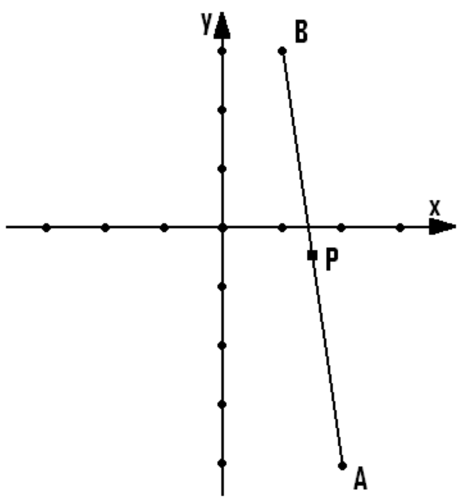
و مختصات نقطهٔ P وسط پاره خط AB چنین بدست می آید:

$$x_P=\frac{x_۱+x_۲}{۲}\quad,\quad y_P=\frac{y_۱+y_۲}{۲}$$

مثال ۱.۴ فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(۲,-۴)$ و $B(۱,۳)$ را یافته و نقطهٔ P وسط AB را پیدا کنید.

حل.

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}\\&=\sqrt{(۲-۱)^۲+(-۴-۳)^۲}\\&=\sqrt{(۱)^۲+(-۷)^۲}\\&=\sqrt{۵۰}\end{aligned}$$



$$P\quad:\quad\begin{cases}x_P=\dfrac{x_۱+x_۲}{۲},\\ y_P=\dfrac{y_۱+y_۲}{۲}.\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}x_P=\dfrac{۲+۱}{۲},\\ y_P=\dfrac{-۴+۳}{۲}.\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}x_P=\dfrac{۳}{۲},\\ y_P=\dfrac{-۱}{۲}.\end{cases}$$

شکل ۲.۴ نمایش پارخط AB در صفحه مختصات دکارتی و نقطه P وسط آن در مثال ۱.۴

[۲]بایستی دقت نمود که نمایش زوج مرتب با بازهٔ باز یکسان است ولی بسته به موضوع مورد بحث، آنها را با هم خلط را نخواهیم کرد.

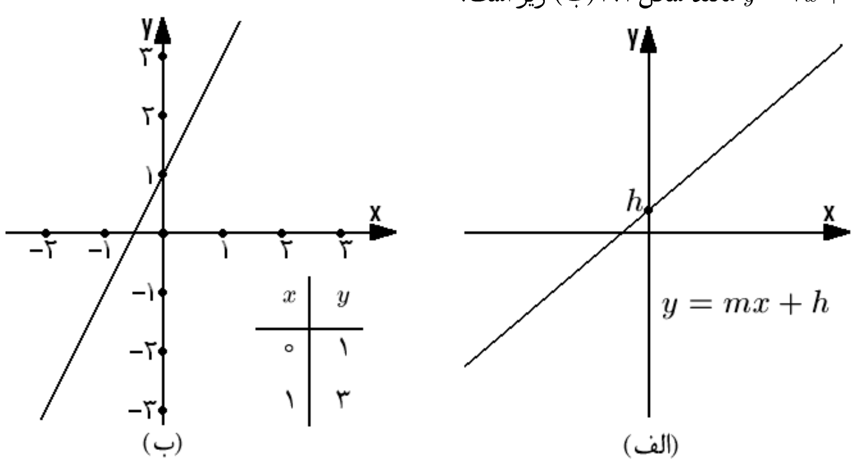
تمرین ۱.۴ .

۱) نقاط زیر را در صفحهٔ مختصات مشخص کنید.
(A) نقطه ای با طول ۲ و عرض -۳. (B) نقطه ای با طول ۳ و عرض دو برابر طول. (C) نقطه ای با طول ۳ و عرض ۴ واقع در ناحیهٔ دوم. (D) نقطه ای با طول -۲ و عرضی مساوی نصف طول. (E) نقطه ای در ربع سوم با طول -۱ و فاصله از مبداء ۴. (F) نقطه ای با عرض ۲ واقع بر محور عرضها. (G) نقطه ای با عرض ۲ و با فاصلهٔ ۴ از نقطهٔ $(۳,-۵)$. (H) نقطه ای با طول ۲ و عرضی که قرینهٔ مقدار طول است.

۲) اگر $A(۱,۲)$ و $B(-۲,۱)$ و $C(-۱,-۲)$ سه نقطه در صفحهٔ مختصات باشند، آنها را در صفحه رسم و مثلث بدست آمده را در نظر بگیرید. طول اضلاع مثلث را بدست آورده و نشان دهید مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین است. سپس نقطهٔ P وسط ضلع BC را یافته و طول میانهٔ $\overline{AP}$ را محاسبه نمائید.

۲.۴ معادلهٔ خط

در صفحهٔ مختصات هر خط راست متشکل از بینهایت نقطه است. مختصات این نقاط پیوسته در یک معادلهٔ ریاضی صدق می کنند که به آن **معادلهٔ خط** گوئیم. مثلاً معادلات $y = ۲x + ۱$ و $y = -۴x - ۱۴$ دو خط راست را در صفحه مشخص می کنند. برای رسم خط در صفحهٔ مختصات کافیست دو نقطه از خط را مشخص کنیم و سپس خط را رسم نمائیم. ترسیم خط $y = ۲x + ۱$ مانند شکل ۳.۴(ب) زیر است.



شکل ۳.۴ (الف) معادله کلی خط $y = mx + h$ (ب) معادله خط $y = ۲x + ۱$

خطوط در صفحه سه دسته اند، خطوط افقی، قائم و مایل. معادلهٔ خطوط افقی به شکل $y=b$ و معادلهٔ خطوط قائم بصورت $x=a$ است. خطی که افقی یا قائم نباشد، مایل بوده و معادلهٔ آن در حالت **استاندارد** بصورت $y=mx+h$ است که m را **شیب خط** و h را **عرض از مبداء خط** گوئیم. برای خط $y=-۴x-۱۴$ شیب برابر -۴ و عرض از مبداء -۱۴ است، یعنی $m=-۴$ و $h=-۱۴$. اگر شیب مثبت باشد خط صعودی و اگر شیب منفی باشد خط نزولی است. عرض از مبداء خط، نقطه‌ای از محور عرضهاست که خط از آن عبور می کند. اگر $m=۰$ خط موازی با محور x–ها خواهد بود.

مطلب ۲.۴ دو خط موازیند اگر شیب های آنها برابر باشد. دو خط بر هم عمودند[۳] اگر حاصلضرب شیبهایشان برابر -۱ باشد. پس اگر $y=mx+h$ و $y=m'x+h'$ دو خط مفروض باشند، آنها موازیند اگر $m=m'$ و عمودند اگر $mm'=-۱$.

دو خط $y=۲x+۴$ و $y=۲x-۵$ با هم موازیند زیرا شیب هر دو ۲ است. **معادلهٔ عمومی خط** بصورت $Ax+By+C=۰$ است که A و B هر دو صفر نیستند و برای تبدیل آن به حالت استاندارد با محاسبهٔ شیب بصورت $m=\frac{-A}{B}$ و عرض از مبداء $h=\frac{-C}{B}$ معادلهٔ خط استاندارد را خواهیم نوشت. مثلاً اگر بخواهیم معادلهٔ خط $۸x-۴y+۲=۰$ را در حالت استاندارد بنویسیم، با محاسبهٔ شیب $m=\frac{-۸}{-۴}=۲$ و عرض از مبدأ $h=\frac{-۲}{-۴}=\frac{۱}{۲}$ معادلهٔ استاندارد آن $y=۲x+\frac{۱}{۲}$ است.

مثال ۲.۴ مقدار a را چنان بیابید که دو خط زیر

$$(a+۳)x-۲y+(a+۴)=۰ \quad , \quad (a+۱)x+(a+۳)y+۲=۰$$

الف) با هم موازی باشند. ب) بر هم عمود باشند.

حل. از فرمول $m=\frac{-A}{B}$ شیب خطوط را بدست می آوریم:

$$m=\frac{-A}{B}=\frac{-a-۳}{-۲} \quad , \quad m'=\frac{-A}{B}=\frac{-a-۱}{a+۳}$$

(الف) برای موازی بودن دو خط می بایست $m=m'$ باشد یعنی

$$\begin{aligned}
\frac{-a-۳}{-۲} &= \frac{-a-۱}{a+۳}\\
(-a-۳)(a+۳) &= (-a-۱)(-۲)\\
-a^۲-۶a-۹ &= ۲a+۲\\
-a^۲-۸a-۱۱ &= ۰\\
a &= -۴\mp\sqrt{۵}
\end{aligned}$$

[۳] دو خط بر همدیگر عمودند اگر زاویهٔ بینشان ۹۰ درجه باشد.

(ب) برای عمود بودن دو خط باید $mm' = -۱$ باشد پس

$$mm' = -۱ \Rightarrow \frac{-a-۳}{-۲} \times \frac{-a-۱}{a+۳} = -۱ \Rightarrow \frac{a+۱}{-۲} = -۱ \Rightarrow a = ۱$$

برای رسم خطوط بهتر است ابتدا معادلهٔ خط را بصورت استاندارد نوشته و بعد آنرا رسم نمائیم. علاوه بر این هر خط را نیز می توان با معین بودن یک نقطه و شیب و یا با مشخص بودن دو نقطه از آن تعیین نمود.

مطلب ۳.۴ معادلهٔ خطی با شیب معین m که از نقطهٔ مفروض $A(x_۱, y_۱)$ می گذرد، از فرمول $y - y_۱ = m(x - x_۱)$ بدست می آید. بعلاوه اگر $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ دو نقطهٔ مفروض در صفحهٔ مختصات دکارتی باشند، معادلهٔ خطی که از A و B می گذرد از فرمول

$$\frac{y-y_۱}{x-x_۱} = \frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} \qquad , \qquad (x_۱ \neq x_۲)$$

حاصل می گردد.

مثال ۳.۴ معادلهٔ خطی که از نقاط $A(۲,۲)$ و $B(-۲,-۱)$ می گذرد را بدست آورید.

حل.

$$\frac{y-y_۱}{x-x_۱} = \frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y-۲}{x-۲} = \frac{-۱-۲}{-۲-۲} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y-۲}{x-۲} = \frac{-۳}{-۴} = \frac{۳}{۴}$$

بنابراین $y - ۲ = \frac{۳}{۴}(x-۲)$ و با ساده کردن داریم $y = \frac{۳}{۴}x + \frac{۱}{۲}$.

مثال ۴.۴ محل برخورد دو خط $y = ۲x - ۱$ و $y = -۳x + ۴$ را پیدا کنید.

حل. برای بدست آوردن تقاطع دو خط y—ها را برابر قرار داده، x را بدست آورده و بعد در یکی از معادلات قرار می دهیم:

$$y = y \;\Rightarrow\; ۲x - ۱ = -۳x + ۴ \;\Rightarrow\; ۵x = ۵ \;\Rightarrow \begin{cases} x = ۱, \\ y = ۲(۱) - ۱ = ۱. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A(۱,۱)$$

مطلب ۴.۴ فاصلهٔ نقطهٔ $P_۰(x_۰, y_۰)$ از خط $Ax + By + C = ۰$ برابر است با

$$d = \frac{|Ax_۰ + By_۰ + C|}{\sqrt{A^۲ + B^۲}}$$

مثال ۵.۴ فاصلهٔ نقطهٔ $P_۰(۲,۳)$ از خط $۳x + ۴y - ۸ = ۰$ را بدست آورید.

$$d = \frac{|Ax_۰ + By_۰ + C|}{\sqrt{A^۲ + B^۲}} = \frac{|۳(۲) + ۴(۳) - ۸|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

تمرین ۲.۴ .

۱) عدد a را چنان بیابید که دو خط $y = (a-۲)x + a$ و $y = ax + ۱$ بر هم عمود باشند.

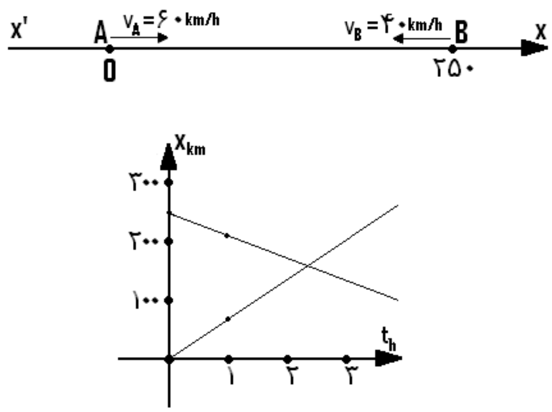
۲) معادلهٔ خطی که شیب آن ۳ بوده و از نقطهٔ $(۵,-۴)$ می گذرد را بدست آورید.

۳) مطلوبست معادلهٔ خطی که از نقاط $A(۱,-۲)$ و $B(۲,-۱)$ می گذرد.

۴) فاصلهٔ نقطهٔ $P_\circ(-۱,۱)$ از خط $x + y + ۲ = \circ$ را بدست آورید.

(فیزیک) برای جسمی که با سرعت ثابت v روی مسیر مستقیم الخطی مانند محور x–ها حرکت می کند، معادلهٔ حرکت طی زمان t معادله‌ای است خطی به شکل $x = vt + x_\circ$ که $x_\circ$ نقطهٔ شروع حرکت است. شیب این خط برابر v است که اگر مثبت باشد متحرک از مبداء مختصات دور می شود و اگر منفی باشد به مبداء مختصات نزدیک می گردد ($x_\circ > \circ$).

مثال ۶.۴ فاصلهٔ دو شهر A و B برابر ۲۵۰ کیلومتر است. دو اتومبیل از این دو شهر بطرف همدیگر بطور همزمان شروع به حرکت می کنند. سرعت اتومبیلی که از A حرکت کرده $۶\circ \frac{km}{h}$ و سرعت اتومبیلی که از B حرکت کرده $۴\circ \frac{km}{h}$ است. محل تلاقی دو اتومبیل به یکدیگر کجا و کی اتفاق می افتد.



شکل ۴.۴ نمودار حرکت اتومبیل های مثال ۶.۴

حل. با توجه به شکل ۴.۴ معادلهٔ حرکت اتومبیل A بشکل $x = ۶\circ t$ و معادلهٔ حرکت اتومبیل B بصورت $x = -۴\circ t + ۲۵\circ$ است که x مکان بر حسب کیلومتر و t زمان بر حسب ساعت است. زمان تلاقی دو اتومبیل عبارتست از $۶\circ t = -۴\circ t + ۲۵\circ$ یا $t = ۲/۵h$ و مکان تلاقی نقطهٔ $x = ۱۵\circ km$ خواهد بود.

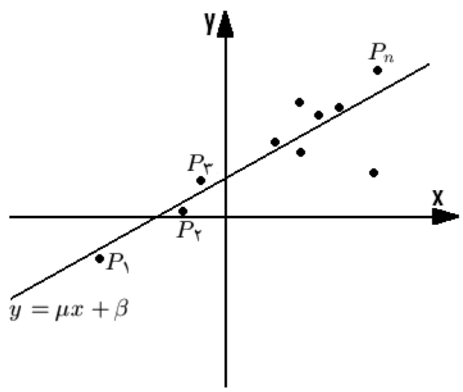
(شیمی) می دانیم مبنای سنجش گرمای جسمی بر حسب مقیاس سلسیوس بین صفر (ذوب یخ) و ۱۰۰ (جوش آب) بوده و بر حسب مقیاس فارنهایت بین ۳۲ (ذوب یخ) و ۱۸۰ (جوش آب) است. اگر افزایش دما بصورت خطی انجام گیرد، فرمولی برای ارتباط بین مقیاس سلسیوس و فارنهایت بیابید.

حل. اگر C مقدار درجهٔ سلسیوس و F درجهٔ فارنهایت باشد سپس معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ $A(۰,۳۲)$ (ذوب یخ) و $B(۱۰۰,۲۱۲)$ (جوش آب) می گذرد عبارتست از

$$\begin{aligned}
\frac{y-y_۱}{x-x_۱} &= \frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}\\
\frac{F-۳۲}{C-۰} &= \frac{۲۱۲-۳۲}{۱۰۰-۰}\\
F-۳۲ &= \frac{۹}{۵}C\\
F &= \frac{۹}{۵}C+۳۲
\end{aligned}$$

۳.۴ برازش

گاهی از طریق اندازه گیری در آزمایشات عملی، نقاط حاصله ظاهراً هیچگونه ارتباطی را با هم نشان نمی دهند. اگر حدسیات ما مبتنی بر این باشد که این نقاط می بایست ارتباطی خطی با همدیگر داشته باشند، بدین ترتیب خطی از بین آنها عبور می دهیم که از نظر ریاضی بهترین و برازنده ترین است و به این عمل در اصطلاح **برازش نقاط با خط** گوئیم.



شکل ۵.۴ خط برازش برای هر تعداد نقطه مفروض در صفحه

فرض کنید $P_۱(x_۱,y_۱)$، $P_۲(x_۲,y_۲)$، $P_۳(x_۳,y_۳)$ و $\cdots$ و $P_n(x_n,y_n)$ تعداد n نقطه در صفحهٔ مختصات باشند. معادلهٔ خط برازش $y=\mu x+\beta$ است که μ و β از دستگاه زیر بدست می آیند:

$$\begin{cases}
(\sum x^۲)\mu+(\sum x)\beta=(\sum xy),\\
(\sum x)\mu+n\beta=(\sum y).
\end{cases}$$

در این دستگاه سیگما $\sum$ نماد جمع است. $\sum x$ بمعنی جمع x–ها، $\sum y$ بمعنی جمع y–ها، $\sum xy$ بمعنی جمع xy–ها و $\sum x^{۲}$ بمعنی جمع $x^{۲}$–هاست. این روش برازش را **روش کمترین مربعات** نامیده و برای محاسبات، بهتر است از جدول زیر استفاده کنیم:

$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$\cdots$	x_n	$\sum x$
$y_۱$	$y_۲$	$y_۳$	$\cdots$	y_n	$\sum y$
$x_۱y_۱$	$x_۲y_۲$	$x_۳y_۳$	$\cdots$	x_ny_n	$\sum xy$
$x_۱^۲$	$x_۲^۲$	$x_۳^۲$	$\cdots$	$x_n^۲$	$\sum x^۲$

مثال ۷.۴ (**شیمی**) در آزمایشی برای تعیین ضریب شکست، محلولی از ۲–پروپانول تهیه شده و بر حسب درصد حجمی محلول، ضریب شکست حاصل از سنجش با رفلکتومتر بصورت جدول زیر بدست آمده است. با روش کمترین مربعات، داده های حاصل را برازش داده و رابطهٔ خطی آنها را بیابید. اگر نمونهٔ مجهولی از ۲–پروپانول توسط رفلکتومتر ۱/۳۴۰ گزارش شده باشد درصد حجمی نمونه ۲–پروپانول را مشخص نمائید.

درصد حجمی محلول	%۲	%۵	%۸	%۱۲	%۱۵
ضریب شکست	۱/۳۳۴۰	۱/۳۳۶۰	۱/۳۳۷۵	۱/۳۴۲۰	۱/۳۴۴۰

حل. برای برازش، نقاط را در جدول زیر می نویسیم:

x_i	%۲	%۵	%۸	%۱۲	%۱۵	۰/۴۲
y_i	۱/۳۳۴۰	۱/۳۳۶۰	۱/۳۳۷۵	۱/۳۴۲۰	۱/۳۴۴۰	۶/۶۹۳۵
x_iy_i	۰/۰۲۶۶۸	۰/۰۶۶۸	۰/۱۰۷	۰/۱۶۱۰۴	۰/۲۰۱۶	۰/۵۶۳۱۲
$x_i^۲$	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۶۴	۰/۰۱۴۴	۰/۰۲۲۵	۰/۰۴۶۲

با جایگذاری مقادیر بدست آمده از طرف راست جدول در دستگاه می نویسیم:

$$\left\{\begin{array}{r} ۰/۰۴۶۲\mu + ۰/۴۲\beta = ۰/۵۶۳۱۲, \\ ۰/۴۲\mu + ۵\beta = ۶/۶۹۳۵. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = ۰/۰۷۹۳ \\ \beta = ۱/۳۳۲. \end{array}\right.$$

که خط برازش $y = ۰/۰۷۹۳x + ۱/۳۳۲$ را نتیجه می دهد. برای نمونهٔ مجهولی از محلول ۲–پروپانول که $y = ۱/۳۴۰$ است این مقدار را در معادلهٔ خط برازش قرار داده و مقدار درصد حجمی $x = \%۱۰/۰۳$ را برآورد می کند.

مثال ۸.۴ (**نجوم**) ابتدای قرن بیستم ستاره شناسان پی بردند که نور کهکشانها با دور شدن از ما تغییر کرده و طبق اثر دوپلر به قرمز گرایش دارد. منجم آمریکائی ادوین هابل، قرمزگرائی [۴] چند کهکشان را اندازه گرفت و نشان داد جهان هستی در حال انبساط است. بنظر او اگر کهکشانی در فاصلهٔ r و با سرعت v از ما دور شود رابطه‌ای خطی بشکل $v = Hr$ دارد. وی با این فرض،

[۴] *Redshift*

مقدار $H_{(\frac{۱}{s})}$ را که **ثابت هابل** نام دارد محاسبه نمود. عکس مقدار H عمر کیهان را نشان می‌دهد.
فرض کنید سرعت و فاصلهٔ چهار کهکشان را اندازه گیری کرده و چنینند:

- دب اکبر فاصلهٔ $۱/۰ \times ۱۰^{۹} ly$ سرعت دور شدن از ما $۱/۵ \times ۱۰^{۷} \frac{m}{s}$.
- اکلیل شمالی فاصلهٔ $۱/۴ \times ۱۰^{۹} ly$ سرعت دور شدن از ما $۲/۲ \times ۱۰^{۷} \frac{m}{s}$.
- گاوران (عوّا) فاصلهٔ $۲/۵ \times ۱۰^{۹} ly$ سرعت دور شدن از ما $۳/۹ \times ۱۰^{۷} \frac{m}{s}$.
- شجاع (هیدرا) فاصلهٔ $۴/۰ \times ۱۰^{۹} ly$ سرعت دور شدن از ما $۶/۱ \times ۱۰^{۷} \frac{m}{s}$.

با روش کمترین مربعات، نقاط را برازش داده و رابطهٔ خطی آنها را می یابیم.

r_i	۱/۰	۱/۴	۲/۵	۴/۰	۸/۹
v_i	۱/۵	۲/۲	۳/۹	۶/۱	۱۳/۷
$r_i v_i$	۱/۵	۳/۰۸	۹/۷۵	۲۴/۴	۳۸/۷۳
$r_i^{۲}$	۱/۰	۱/۹۶	۶/۲۵	۱۶/۰	۲۵/۲۱

دقت کنید که چون مقادیر فاصله یکنواختند آنها را برحسب $۱۰^{۹} ly$ نوشته و مقادیر سرعت نیز برحسب $۱۰^{۷} \frac{m}{s}$ هستند و این کار خلاصه نویسی بخاطر سادگی محاسبات انجام می گیرد.
با جایگذاری مقادیر بدست آمده از طرف راست جدول در دستگاه می نویسیم:

$$\left\{ \begin{array}{c} ۲۵/۲۱\mu + ۸/۹\beta = ۳۸/۷۳, \\ ۸/۹\mu + ۴\beta = ۱۳/۷. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu = ۱/۵۲۵۲ \\ \beta = ۰/۰۳۱۴۴. \end{array} \right.$$

و خط برازش

$$v(۱۰^{۷} \frac{m}{s}) = ۱/۵۲۵۲ r(۱۰^{۹} ly) - ۰/۰۳۱۴۴$$

خواهد بود و با ساده کردن آن خط برازش بصورت

$$v(\frac{m}{s}) = ۱۵۲/۵۲ r(ly) - ۰/۰۳۱۴۴ \times ۱۰^{-۷}$$

است. بدین ترتیب ثابت هابل $H = ۱/۵۲۵۲ \times ۱۰^{۴} \frac{\frac{m}{s}}{Mly}$ بوده و سن کیهان برابرست با

$$t = \frac{۱}{H} = \frac{۱}{۱/۵۲۵۲ \times ۱۰^{۴} \frac{\frac{m}{s}}{Mly}} = \frac{۹/۵ \times ۱۰^{۱۵} m \times ۱۰^{۶}}{۱/۵۲۵۲ \times ۱۰^{۴} \frac{m}{s}} = ۶/۲۳ \times ۱۰^{۱۷} s \sim ۱۹ Gy$$

این مقدار ۱۹ میلیارد سال برای سن جهان با وجود اجرام دوری مانند کوازارها کمی غیرعادی است. طی سالهای بعد و اندازه گیری اجرام بیشتری از آسمان، ثابت هابل با دقت بیشتری بدست آمد و ستاره شناسان با استفاده از این مقادیر سن جهان را بین $۱۲Gy$ و $۱۸Gy$ پیش‌بینی می‌کنند.

تمرین ۳.۴ تکمیلی.

۱) نقاط $A(-۳,۱)$ و $B(۱,۳)$ و $C(۳,-۱)$ را در صفحهٔ مختصات در نظر بگیرید.

الف) مثلث ΔABC را در صفحهٔ مختصات رسم کنید.

ب) طول اضلاع مثلث ΔABC را حساب کرده و نشان دهید این مثلث متساوی الساقین است.

ت) نقطهٔ M وسط پاره خط $\overline{AC}$ را یافته و طول میانهٔ $\overline{BM}$ را پیدا کنید.

ث) ثابت کنید مثلث ΔABC قائم الزاویه است یعنی $\overline{AC}^۲ = \overline{AB}^۲ + \overline{BC}^۲$.

ج) مساحت این مثلث را حساب کنید.

۲) دو خط $y = x - ۴$ و $y = -۳x + ۸$ را در یک صفحهٔ مختصات رسم کرده و نقطهٔ برخورد آنها را بدست آورید.

۳) دو خط $۶x - ۳y = ۹$ و $y - ۳x + ۴ = ۰$ را در یک صفحهٔ مختصات رسم کرده و نقطهٔ برخورد آنها را بیابید. شیب و عرض از مبداء هر کدام را مشخص کنید.

۴) دو خط $y = -۲x - ۱۴$ و $-۳x + ۷y + ۸ = ۰$ چه وضعیتی نسبت بهم دارند؟ (موازیند، متعامدند یا متقاطعند).

۵) معادلهٔ خطی که شیب آن برابر ۲ بوده و از نقطهٔ $(۴,۵)$ بگذرد را بنویسید.

۶) معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقاط $A(۱,۵)$ و $B(-۴,۲)$ می گذرد.

۷) بازای چه مقداری از a خط $ax + (۲-a)y = -۲$

(الف) موازی محور x–هاست.

(ب) موازی محور y–هاست.

(ج) از نقطهٔ $(۲,-۴)$ می گذرد؟

۸) مقدار a را چنان بیابید که دو خط زیر

$$y = (۲a-۱)x + ۴$$
$$y = (a+۱)x - ۱$$

الف) بر هم عمود باشند. ب) با هم موازی باشند.

۹) مقدار k را چنان بیابید که دو خط زیر

$$(k-۱)x + ky + ۲ = ۰$$
$$(۲-۲k)x + ۴y = ۴$$

الف) بر هم عمود باشند. ب) با هم موازی باشند.

۱۰) a و b را طوری بیابید که دو خط زیر بر هم منطبق شوند.

$$y = (a-b)x + b - 1 \quad , \quad y = 3ax - 5a - b$$

۱۱) مختصات دو رأس وتری از یک مثلث قائم الزاویه $(1,4)$ و $(-2,1)$ است. مختصات رأس سوم مثلث چیست؟

۱۲) (الف) نشان دهید معادلهٔ خطی که محور x–ها را در نقطهٔ a و محور y–ها را در نقطهٔ b قطع می کند بصورت زیر است.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad , \qquad a, b \neq 0$$

(ب) معادلهٔ خطی که محور طولها را در ۲+ و محور عرضها را در ۱− قطع کند چیست؟

(ج) مساحت ایجاد شده بین این خط و محورهای مختصات چیست؟ (در هر دو حالت الف و ب).

۱۳) مقدار m را چنان پیدا کنید که نقاط $A(1,m)$، $B(2m+1,4)$ و $C(m-1,2)$ بر یک خط راست باشند.

۱۴) تمام نقاطی را با مختصات صحیح بیابید که فاصلهٔ آنها تا مبداء حداکثر ۲/۳ باشد.

۱۵) مربعی بیابید که مختصات دو رأس واقع بر دو سر یکی از اقطار آن $C(4,-2)$ و $D(1,1)$ باشند. مساحت این مربع چیست؟

۱۶) مختصات دو رأس غیر مجاور یک متوازی الاضلاع $E(4,5)$ و $F(-3,3)$ است. دو رأس دیگر را طوری بیابید که مساحت متوازی الاضلاع ۱۰ باشد.

۱۷) (**شیمی**) مبنای گرمای جسمی بر حسب مقیاس کلوین بین ۲۷۳ (ذوب یخ) و ۳۷۳ (جوش آب) است. فرمولی برای ارتباط بین مقیاس سلسیوس و کلوین و نیز فارنهایت و کلوین بیابید. دمای ذوب آهن برابر ۱۵۳۸ درجه سلسیوس است. این دما چند درجهٔ فارنهایت و چند کلوین است؟

۱۸) (**فیزیک**) بدون در نظر گرفتن نیروی جاذبه گرانش، فرض کنیم که خورشید در اثر حرارت خود منبسط شده و مرتب بر حجمش افزوده می شود. اگر در سال ۲۰۰۰م. حجم آن $1/406 \times 10^{27} m^3$ و در سال ۲۰۱۰م. حجمش به $1/424 \times 10^{27} m^3$ رسیده باشد و این افزایش حجم رشدی خطی داشته باشد فرمولی برای این افزایش حجم بر حسب سال بیابید. طبق فرمول بدست آمده در سال ۲۱۰۰م. حجم آن چقدر خواهد بود.

۱۹) (**فیزیک**) فاصلهٔ دو شهر A و B برابر ۱۰۰ کیلومتر است. هنگامی که اتومبیل اول از A شروع به حرکت می کند اتومبیل B مقدار ۱۰ کیلومتر از شهر فاصله گرفته است. سرعت

اتومبیلی که از A حرکت کرده $۷۰\frac{km}{h}$ و سرعت اتومبیلی که از B حرکت کرده $۹۰\frac{km}{h}$ است. محل تلاقی دو اتومبیل به یکدیگر کجا و چه زمانی پس از حرکت اتفاق می افتد.

۲۰) **(اقتصاد)** قیمت کالائی در ابتدای ماه ۵۰۰ تومان و در روز پنجم ماه به ۵۲۰ تومان رسیده است. اگر این قیمت رشد خطی افزایشی داشته باشد قیمت کالا در انتهای ماه به چقدر خواهد رسید؟

۲۱) هر هفته جمعیت جهان ۱/۴ میلیون نفر افزایش می یابد. اگر در سال ۲۰۰۰م. جمعیت جهان ٦۰۸۴ میلیون نفر بوده باشد، درصد افزایش رشد جمعیت سالیانه چقدر بوده و در سال ۲۰۲۰م. چقدر خواهد بود. نتیجهٔ حاصل را با جمعیت جهان در سال ۲۰۱۱م. که ٦۹۰۷ میلیون نفر بوده مقایسه نمائید.

۲۲) **(زیست)** جهت تعیین حجم پلاسمای خون بدن انسان یا جانور، مقداری تیوسولفات به جریان خون تزریق می کنند. از آنجا که تیوسولفات یکنواخت و بدون اتلاف در خون باقی نمی ماند و کلیه آنرا بسرعت دفع می کند، بنابراین مقدار آن در خون مرتب کاهش می یابد. اکنون در آزمایشی مقدار ۰/۵ گرم تیوسولفات را به جانداری تزریق نموده و مقدار آن در خون جانور طبق جدول زیر بدست می آید:

زمان پس از تزریق (دقیقه)	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
غلظت پلاسمای تیوسولفات $\frac{mg}{ml}$	۴۴	۳۸	۳۳	۲۸	۲۵

با روش کمترین مربعات، نقاط را برازش و معادلهٔ خط را بیابید. چه زمانی پس از تزریق غلظت تیوسولفات در خون به $۳۰\frac{mg}{ml}$ می رسد؟

فصل ۵

تابع

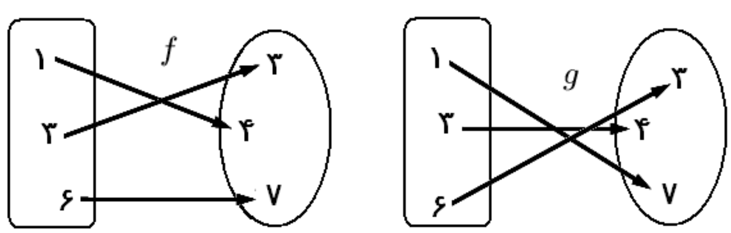
تابع و مفهوم آن مهمترین بخش ریاضی است. آنچه عموماً در ریاضی بعنوان تابع شناخته می‌شود مفهومی است که طی چند صد سال شکل گرفته و تکامل پیدا کرده است. از آنجا که در بحث مجموعه ها، تنها اجتماع و اشتراک و متمم مفاهیمی کلی اند، روابط بین اعضاء مجموعه‌ها بنحو مطلوب در مفهوم تابع جلوه پیدا می کند. حال به تعریف تابع می پردازیم.

۱.۵ تعریف تابع

مجموعه‌های A و B را در نظر بگیرید. **تابع** f قاعده‌ای است که به هر عضو $a \in A$، یک عضو $b \in B$ را نسبت می دهد. بعبارتی دیگر یک ارتباطی است که عضوهای A را به عضوهای B می برد و می نویسیم $f : A \to B$. مجموعهٔ A را **مجموعهٔ آغاز** و مجموعهٔ B را **مجموعهٔ پایان** گوئیم. این ارتباط بین $a \in A$ و $b \in B$ را بصورت زوج مرتب (a, b) نشان می دهیم. مثلاً با فرض $A = \{۱, ۳, ۶\}$ و $B = \{۴, ۳, ۷\}$، دوتابع f و g از A به B را چنین تعریف می کنیم:

$$f : A \to B \qquad\qquad g : A \to B$$

$$f = \{(۱, ۴), (۳, ۳), (۶, ۷)\} \qquad g = \{(۱, ۷), (۳, ۴), (۶, ۳)\}$$



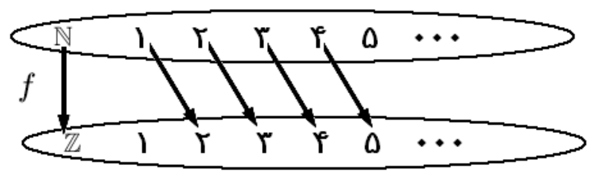
شکل ۱.۵ توابع f و g روابطی بین دو مجموعه A و B

باید توجه کنید که هر دوی f و g توابعی از A به B بوده و این توابع هر مقدار از A را **تنها** به یک مقدار از B می برند. این انتقال اعضاء از A به B برای ما بسیار با اهمیت است. قاعده‌ای که طبق آن f اعضائی از A را به اعضائی از B می برد را **ضابطهٔ تابع** گوئیم. فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی و $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح باشند (شکل۲.۵). در نظر بگیرید

$$f = \{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶),(۶,۷),\cdots\}$$

چنین ضابطه‌ای که اعضاء $\mathbb{N}$ را به اعضاء $\mathbb{Z}$ می برد، بصورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{cases} f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z} & , \\ f(n) = n + ۱. \end{cases}$$



شکل ۲.۵ رفتار یک تابع که اعضای $\mathbb{N}$ را به برخی از اعضای $\mathbb{Z}$ می برد

همچنین با داشتن ضابطهٔ تابع می توان اعضاء آنرا بدست آورد. بطور مثال اگر

$$h:\mathbb{N}\to\mathbb{Z} \quad , \quad h(n) = ۲n + ۱$$

باشد، با انتخاب n می توان تابع را بصورت زوجهای مرتب به شکل زیر نمایش داد:

$$h = \{(۱,۳),(۲,۵),(۳,۷),(۴,۹),(۵,۱۱),\cdots\}$$

ضابطهٔ توابع را معمولاً با حروف $f, g, h, ...$ مشخص می کنند ولی گاهی نیز بسته به موضوع مورد بحث با حروف مرتبط مشخص می نمائیم، مثل T برای تابع دما در ترمودینامیک. دقت کنید که ضابطهٔ تابع عضو مجموعهٔ آغاز را تنها به یک عضو مجموعهٔ پایان می برد و این مشخصهٔ اصلی یک تابع است. تابعی که در آن $B = \mathbb{R}$ باشد را **تابع حقیقی** گوئیم.

مثال ۱.۵ برای تابعی با ضابطهٔ $f(x) = ۲x^۲ - ۴$ حاصل مقادیر زیر را بدست آورید.

$$f(۲)\ ,\ f(-۲)\ ,\ f(۳)\ ,\ f(۵)\ ,\ f(-۱)$$

حل. برای یافتن مقادیری که تابع $f(x)$ مشخص می کند می بایست بجای متغیر x اعداد درون پرانتز را قرار دهیم، پس

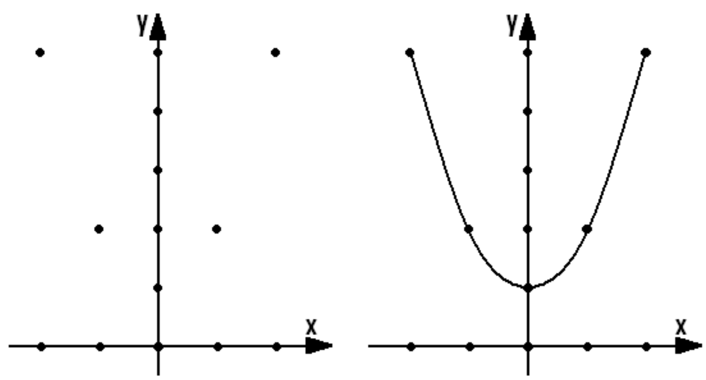
$$f(۲) \quad = \quad ۲(۲)^۲ - ۴ = ۲(۴) - ۴ = ۸ - ۴ = ۴$$

$$\begin{aligned} f(-۲) &= ۲(-۲)^۲ - ۴ = ۲(۴) - ۴ = ۸ - ۴ = ۴ \\ f(۳) &= ۲(۳)^۲ - ۴ = ۲(۹) - ۴ = ۱۸ - ۴ = ۱۴ \\ f(۵) &= ۲(۵)^۲ - ۴ = ۲(۲۵) - ۴ = ۵۰ - ۴ = ۴۶ \\ f(-۱) &= ۲(-۱)^۲ - ۴ = ۲(۱) - ۴ = ۲ - ۴ = -۲ \end{aligned}$$

۱.۱.۵ نمودار تابع

هر تابع را می توان روی صفحهٔ مختصات دکارتی به شکل زوجهای مرتب نمایش داد. برای مثال اگر بخواهیم نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ + ۱$ را در صفحهٔ مختصات دکارتی رسم کنیم، کافیست نقاط دلخواهی را برای x انتخاب کرده و با بدست آوردن مقادیر y نقاط را بصورت زوج مرتب بنویسیم. بنابراین نمودار $y = f(x)$ بصورت زیر رسم می شود. این روش رسم را **رسم با نقطه یابی** نامیده و هرچه تعداد نقاط بیشتری مشخص شود شکل دقیقتر ترسیم خواهد شد.

x	y
۲	۵
۱	۲
۰	۱
-۱	۲
-۲	۵



شکل ۳.۵ رسم نمودار تابع $f(x) = x^۲ + ۱$ با نقطه یابی

مطلب ۱.۵ نمودار یک تابع عبارتست از مجموعه نقاطی از صفحه که مختصاتشان در ضابطهٔ تابع صدق می کند. نمودار تابع را **مکان هندسی** نقاط تابع نیز می نامند.

برای تابعی با ضابطهٔ $y = f(x)$، بجای x می توان هر عددی را قرار داد پس x را **متغیر مستقل** نامیم. y که وابسته به x بوده و از ضابطهٔ تابع حاصل می شود را **متغیر وابسته** می نامیم. بطورکلی مجموعهٔ تمام مقادیری را که **می توان** بجای x قرار داد، **دامنهٔ تابع** نامیده و آنرا با D_f نشان می دهند. برای تابع مثال۱.۵، $D_f = \mathbb{R}$ است. از طرفی دیگر مقادیری که از تابع $f(x)$ بدست می آید روی محور y–ها تنها قسمت خاصی را می پوشاند. مجموعهٔ تمام مقادیری که از مقادیر y بدست می آید را **برد تابع** نامیده و با R_f نشان می دهیم. برای تابع شکل۳.۵، $R_f = [۱, \infty)$ است. روش بدست آوردن دامنه و برد برخی از توابع را در ذیل ذکر خواهیم نمود.

تمرین ۱.۵ .

۱) آیا می توانید برای توابع زیر ضابطه‌ای بیان کنید؟

$$g = \{(۱, -۱), (۲, -۲), (۳, -۳), (۴, -۴), (۵, -۵), \cdots\}$$
$$h = \{(۱, ۲), (۲, ۵), (۳, ۱۰), (۴, ۱۷), (۵, ۲۶), \cdots\}$$
$$f = \{(۱, ۶), (۲, ۸), (۳, ۱۰), (۴, ۱۲), (۵, ۱۴), \cdots\}$$

۲) برای تابع $g(x) = x^۳ - x + ۲$ حاصل مقادیر زیر را بدست آورید.

$$g(۲)\ ,\ g(-۲)\ ,\ g(۳)\ ,\ g(۵)\ ,\ g(-۱)$$

۳) توابع $f(x) = x^۲ + ۳$ و $g(x) = -۲x^۲ + ۴$ را در صفحهٔ مختصات رسم کنید.

۲.۱.۵ دامنهٔ توابع

برای بدست آوردن دامنهٔ یک تابع **عموماً** روش مشخصی وجود دارد، بدین طریق که در توابع **کسری** مخرج باید مخالف صفر باشد، چون تقسیم بر صفر مجاز نیست. در توابع **رادیکالی**، زیر رادیکال می بایست مثبت باشد، زیرا عدد منفی زیر رادیکال برای ما مفهومی ندارد. به چند مثال توجه نمائید.

مثال ۲.۵ دامنهٔ $f(x) = \dfrac{x-۱}{x-۵}$ را بدست آورید.

حل. چون در حالت کسری مخرج می بایست صفر نباشد لذا $x - ۵ \neq ۰$ یا $x \neq ۵$ بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{۵\}$ یعنی تمام اعداد حقیقی بجز ۵.

مثال ۳.۵ دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{x-۱}$ را بیابید.

حل. در حالت رادیکالی زیر رادیکال مثبت است لذا $x - ۱ \geq ۰$ یا $x \geq ۱$ و این بدین معنی است که تنها اعداد بیشتر از یک قابل قبولند پس $D_g = [۱, +\infty)$.

مثال ۴.۵ مطلوبست دامنهٔ تابع $g(x) = \dfrac{۳+\sqrt{x+۱}}{x-۲}$

حل. در حالت رادیکالی زیر رادیکال مثبت است لذا $x + ۱ \geq ۰$ یا $x \geq -۱$ بنابراین $D_۱ = [-۱, +\infty)$. از طرفی طبق حالت کسری مخرج می بایست صفر نباشد لذا $x - ۲ \neq ۰$ یا $D_۲ = \mathbb{R} - \{۲\}$. از آنجائیکه هر x باید در صورت و مخرج صدق کند پس $D_g = D_۱ \cap D_۲$ و بنابراین $D_g = [-۱, +\infty) - \{۲\}$.

مثال ۵.۵ دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-۱}{x-۵}}$ را بدست آورید.

حل. چون زیر رادیکال می بایست مثبت باشد پس $\dfrac{x-۱}{x-۵} \geq ۰$ ریشه‌های صورت و مخرج را بدست آورده و آنرا تعیین علامت می کنیم، پس $D_f = (-\infty, ۱] \cup (۵, +\infty)$.

۳.۱.۵ برد توابع

بطور کلی برای بدست آوردن برد روش مشخصی وجود ندارد ولی ما با ذکر چند مثال حالات خاصی را بررسی می کنیم.

مثال ۶.۵ برد تابع $f(x) = x^2 + 3$ را بیابید.

حل. از آنجا که $x^2 \geq 0$ است پس با اضافه کردن مقدار ۳ به طرفین داریم $x^2 + 3 \geq 3$. اما طرف چپ برابر با y است لذا $y \geq 3$ یعنی $R_f = [3, \infty)$.

مثال ۷.۵ برد تابع $g(x) = -2x^2 + 4$

حل. چون $x^2 \geq 0$ است، با ضرب طرفین در عدد ۲– و عوض شدن طرفین نامساوی، نتیجه می شود که $-2x^2 \leq 0$ با اضافه کردن مقدار ۴ به طرفین داریم $-2x^2 + 4 \leq 4$ اما طرف چپ برابر با y است پس $y \leq 4$ یعنی $R_g = (-\infty, 4]$.

مثال ۸.۵ برد تابع $g(x) = \sqrt{x-1}$ را بدست آورید.

حل. چون رادیکال همیشه مثبت است پس $y = \sqrt{x-1} \geq 0$ یعنی $R_g = [0, +\infty)$.

مثال ۹.۵ برد تابع $y = 2x^2 - 4x + 9$ را بدست آورید.

حل. می نویسیم $2x^2 - 4x + 9 - y = 0$ و برای معنی دار بودن x باید $\Delta \geq 0$ پس

$$\Delta \geq 0 \Longrightarrow (-4)^2 - 4(2)(9-y) \geq 0 \Longrightarrow 16 - 8(9-y) \geq 0 \Longrightarrow y \geq 7$$

و برد برابر $R_y = [7, +\infty)$ بدست می آید.

مثال ۱۰.۵ مطلوبست برد تابع $h(x) = \dfrac{2x+1}{x-4}$

حل. از آنجا که $h(x) = \dfrac{2x+1}{x-4}$ تابعی کسری است، برای بدست آوردن برد این تابع می نویسیم $y = \dfrac{2x+1}{x-4}$ با طرفین–وسطین داریم

$$\begin{aligned}
y(x-4) &= 2x+1 \\
yx - 4y &= 2x+1 \\
yx - 2x &= 1+4y \\
x(y-2) &= 1+4y \\
x &= \frac{1+4y}{y-2}
\end{aligned}$$

در این عبارت y نمی تواند مقدار ۲ در مخرج را بپذیرد و $y \neq 2$ لذا $R_h = \mathbb{R} - \{2\}$.

۴.۱.۵ اعمال روی توابع

توابع $f:A\to B$ و $g:B\to A$ را با دامنه های D_f و D_g در نظر می گیریم. مجموع، تفاضل، حاصلضرب و خارج قسمت دو تابع و همچنین دامنه‌های آنها را چنین تعریف می کنیم:

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x) \quad , \quad D_{f\pm g}=D_f\cap D_g$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x) \quad , \quad D_{f.g}=D_f\cap D_g$$
$$(f/g)(x)=f(x)/g(x) \quad , \quad D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x:g(x)=0\}$$

مثال ۱۱.۵ دامنهٔ تابع $y=\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}-3}$ را بدست آورید.

حل. از آنجا که تابع مورد نظر خارج قسمت دو تابع $f(x)=\sqrt{x+4}$ و $g(x)=\sqrt{x}-3$ است، بطور جداگانه دامنه ها را بدست می آوریم $D_f=[-4,+\infty)$ و $D_g=[0,+\infty)$ و طبق تعریف بالا داریم:

$$\begin{aligned} D_{\frac{f}{g}} &= D_f\cap D_g-\{x:g(x)=0\} \\ &= [-4,+\infty)\cap[0,+\infty)-\{x:\sqrt{x}-3=0\} \\ &= [0,+\infty)-\{9\} \end{aligned}$$

مطلب ۲.۵ دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ برابرند اگر ضابطه هایشان (از نظر جبری) مساوی بوده و دامنه هایشان نیز یکی باشد.

مثال ۱۲.۵ دامنهٔ تابع $h(x)=\frac{x+2}{x+2}$ را بدست آورید.

حل. هر چند این تابع از نظر مقدار برابر یک است اما باید دقت کرد که دامنهٔ تابع متفاوت از مجموعه اعداد حقیقی است زیرا طبق تعریف بالا

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x:g(x)=0\}=\mathbb{R}\cap\Big(\mathbb{R}-\{x:x+2=0\}\Big)=\mathbb{R}-\{-2\}$$

پس $h(x)=1$ که $D_h=\mathbb{R}-\{-2\}$.

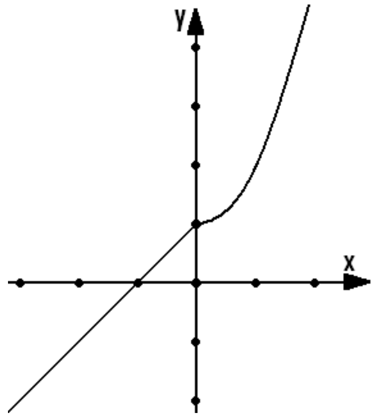
۵.۱.۵ تابع چند ضابطه‌ای

توابع چند ضابطه‌ای که بصورت قطعه ای تعریف می شوند، دارای شکل کلی بصورت

$$f(x)=\begin{cases} \text{ضابطه}1 & , \quad \text{محدوده}1 \\ \text{ضابطه}2 & , \quad \text{محدوده}2 \\ \cdots & \\ \text{ضابطه}n & , \quad \text{محدوده}n \end{cases}$$

هستند. در این حالت دامنهٔ تابع عبارتست از اجتماع محدوده ها. برای مثال تابع دو ضابطه‌ای

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & ,x\geq ۰, \\ x+۱ & ,x<۰. \end{cases}$$



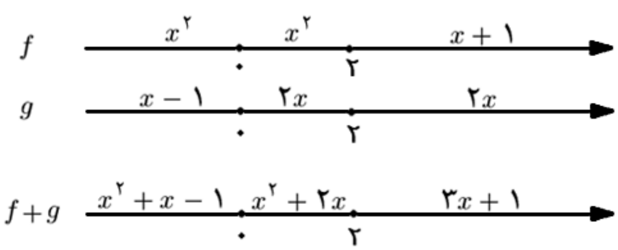
شکل ۴.۵ رسم نمودار یک تابع دو ضابطه‌ای

را در نظر می گیریم. شکل۴.۵ نمودار این تابع بوده و دامنه و برد آن $\mathbb{R}$ است. جهت رسم تابع چند ضابطه‌ای باید هر ضابطه را جداگانه رسم و سپس آنها را محدود به دامنه تعریف شده نمائیم. برای بدست آوردن حاصلجمع، حاصلضرب، تفاضل یا خارج قسمت توابع چندضابطه‌ای، می بایست دامنهٔ آنها را تجزیه کنیم تا بصورت مشابه در بیایند و سپس روی دامنه های مشترک این اعمال را انجام دهیم.

مثال ۱۳.۵ جمع دو تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & ,x\leq ۲, \\ x+۱ & ,x>۲. \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x-۱ & ,x<۰, \\ ۲x & ,x\geq ۰. \end{cases}$ را بیابید.

حل. مانند شکل۵.۵ دامنهٔ آنها را بطور مجزا نوشته و مجموع را روی نواحی مشترک می‌نویسیم:

$$f(x)+g(x)=\begin{cases} x^{۲} & ,x\leq ۲, \\ x+۱ & ,x>۲. \end{cases}+\begin{cases} x-۱ & ,x<۰, \\ ۲x & ,x\geq ۰. \end{cases}=\begin{cases} x^{۲}+x-۱ & ,x<۰, \\ x^{۲}+۲x & ,۰\leq x\leq ۲, \\ ۳x+۱ & ,x>۲. \end{cases}$$



شکل ۵.۵ مجموع دو تابع روی محدوده مشترکشان

تمرین ۲.۵ .

۱) دامنهٔ توابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{x^{۲}-۴}{x-۲}\quad,\quad g(x)=\sqrt{x+۳}+\frac{۱}{x}\quad,\quad h(x)=\sqrt{x-۱}+۲\sqrt{۲-x}$$
$$i(x)=\frac{\sqrt{۶-x}}{x-۲}\quad,\quad j(x)=\frac{\sqrt{x-۳}}{\sqrt{۲+x}}\quad,\quad k(x)=\sqrt{\frac{x-۴}{۳-x}}$$
$$l(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}\quad,\quad m(x)=\sqrt{۴-x^{۲}}\quad,\quad n(x)=\sqrt{\frac{x^{۲}+۳x+۲}{۲x^{۲}+x-۱}}$$

۲) برد توابع زیر را مشخص نمائید.

$$f(x)=\frac{۲x-۱}{x-۲}\ ,\ g(x)=۴x^{۲}+۸x+۴\ ,\ h(x)=x^{۴}-۲x^{۲}+۵$$
$$i(x)=۴x^{۲}+۳\ ,\ j(x)=۳(x+۶)^{۲}-۲\ ,\ k(x)=\frac{x+۲}{۳x-۱}$$

۳) مجموع توابع چند ضابطه‌ای زیر را بنویسید. آنها را در صفحهٔ مختصات رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x-۲ & ,x\leq ۱, \\ ۳x+۴ & ,x>۱. \end{cases}+\begin{cases} ۴x-۱ & ,x\leq -۱, \\ ۲x-۵ & ,x>-۱. \end{cases}$$
$$g(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & ,x<-۲, \\ ۲x^{۲}-x & ,-۲\leq x\leq ۳, \\ x+۲ & ,x>۳. \end{cases}+\begin{cases} ۳x-۱ & ,x<۰, \\ ۲x+۲ & ,۰\leq x\leq ۲, \\ x^{۲}-۱ & ,x>۲. \end{cases}$$

۴) خط $y=x+۱$ و منحنی $y=۷-x^{۲}$ را در یک صفحهٔ مختصات رسم کرده و نقاط برخورد آنها را دقیقاً بدست آورید.

۲.۵ توابع خاص

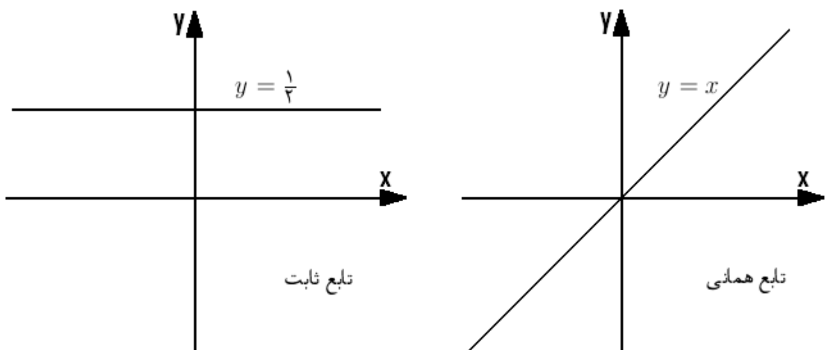
در این بخش چند تابع مهم و پراستفاده را معرفی و اجمالاً بررسی می کنیم. این توابع شامل توابع ثابت، همانی، چند جمله‌ای، جزء صحیح، علامت و توابع مهم لگاریتمی و نمائی می باشند.

۱.۲.۵ تابع همانی

تابع حقیقی با ضابطهٔ $f(x)=x$ را **تابع همانی** گوئیم که مقدار y آن همان x آنست. این تابع ناحیهٔ اول و سوم را نصف می کند و به آن نیمساز ناحیهٔ اول و سوم نیز گویند.

۲.۲.۵ تابع ثابت

تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ که $f(x)=a$ باشد (a عدد ثابت است)، را **تابع ثابت** گوئیم. این تابع یک خط راست موازی محور x–هاست، مثل تابع ثابت $y=\frac{۱}{۲}$. برد تابع ثابت مجموعهٔ تک عضوی $R_f=\{a\}$ است.



شکل ۶.۵ شکل تابع همانی $y=x$ و تابع ثابت $y=\frac{۱}{۲}$

۳.۲.۵ توابع درجهٔ اول

تابع درجهٔ اول همان تابع خطی $y=mx+h$، با شیب m و عرض از مبداء h است که در بخش ۲.۴ راجع به آن صحبت کردیم.

۴.۲.۵ توابع درجهٔ دوم

تابع سه جمله‌ای درجه دوم را سهمی گویند و به شکل

$$y=ax^{۲}+bx+c$$

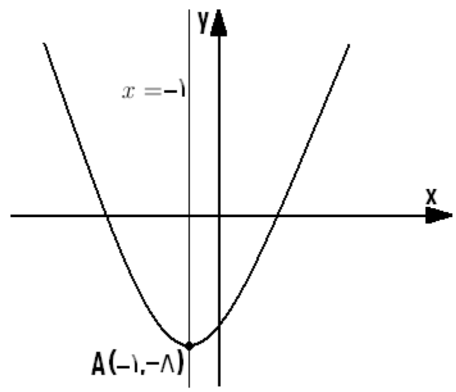
است که در آن $a\neq ۰$ و b و c اعدادی حقیقی هستند، مانند سهمی $y=۲x^{۲}+۴x-۶$. برای رسم سهمی لازم است محورتقارن سهمی $x=x_۰$ و رأس سهمی $(x_۰,y_۰)$ را بدست آوریم. محور تقارن سهمی عبارتست از $x_۰=\frac{-b}{۲a}$ و برای بدست آوردن رأس سهمی مقدار طول $x_۰$ بدست آمده را در معادلهٔ سهمی قرار داده که مقدار عرض $y_۰=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}$ بدست می آید.

مثال ۱۴.۵ مطلوبست رسم سهمی $y=۲x^{۲}+۴x-۶$ با یافتن محور تقارن و راس آن.

حل. برای محور تقارن و رأس این سهمی می نویسیم

$$x_۰=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{۲\times ۲}=-۱ \quad , \quad y_۰=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}=\frac{-۴۸-۱۶}{۸}=-۸$$

لذا محور تقارن $x = -۱$ و رأس سهمی $(-۱, -۸)$ بوده و شکل سهمی چنین می شود.



شکل ۷.۵ شکل سهمی $y = ۲x^۲ + ۴x - ۶$

مطلب ۳.۵ اگر در معادلهٔ سهمی $a > ۰$ باشد، تقعر (گودی) سهمی رو به بالا و اگر $a < ۰$ باشد، تقعر سهمی رو به پائین است.

۵.۲.۵ تابع چندجمله‌ای درجهٔ n

این تابع بصورت زیر تعریف می شود

$$y = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + a_{n-۲} x^{n-۲} + \cdots + a_۱ x + a_۰$$

که در آن ضرایب $a_n, a_{n-۱}, \cdots, a_۱, a_۰$ اعداد حقیقی هستند. $a_n \neq ۰$ فرض شده و $a_۰$ را جملهٔ ثابت چندجمله‌ای نامند.

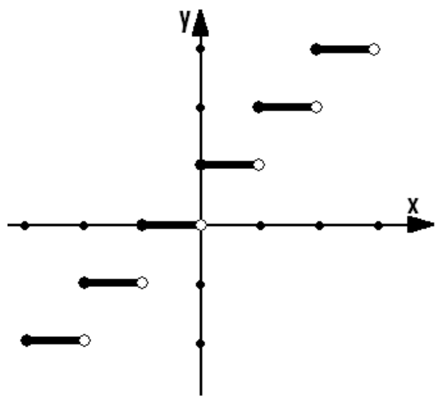
۶.۲.۵ تابع جزء صحیح (تابع پله‌ای)

هر عدد حقیقی x را می توان بصورت مجموع یک عدد صحیح و یک عدد اعشاری نوشت. در ریاضیات **جزء صحیح** عدد حقیقی x را با $[x]$ نشان می دهیم. برای مثال داریم:

$$[۵/۶] = ۵ \ , \ [-۶/۴] = -۷ \ , \ [۲/۲۱] = ۲ \ , \ [-۱/۵۲] = -۲$$

اکنون تابع $f(x) = [x]$ را روی تمام اعداد حقیقی تعریف نموده و آن را **تابع جزء صحیح** نامیم که دارای شکلی به صورت زیر می باشد (شکل۸.۵). توجه کنید که $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = \mathbb{Z}$.

خطوط شکل در نقاط ابتدائی بازه موجود و در نقاط انتهائی بازند.



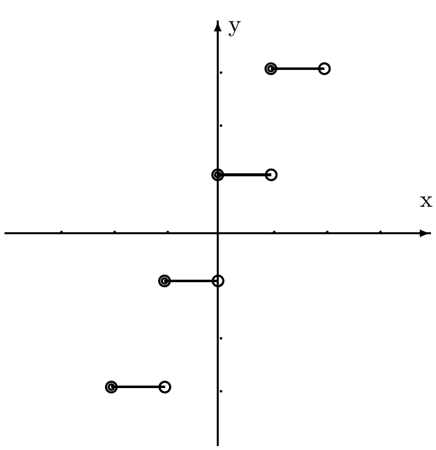
شکل **۸.۵** شکل تابع پله‌ای $y = [x]$

مثال ۱۵.۵ تابع پله‌ای $g(x) = ۲[x] + ۱$ را در فاصلهٔ $[-۲, ۲)$ رسم کنید.

حل. ابتدا فاصلهٔ $[-۲, ۲)$ را به چهار زیر بازه تقسیم می کنیم و سپس روی هر زیر بازه، مقدار تابع را بدست آورده و آنها را رسم خواهیم نمود. بدین صورت:

$$[-۲, -۱) \Longrightarrow [x] = -۲ \Longrightarrow y = ۲(-۲) + ۱ = -۳$$
$$[-۱, ۰) \Longrightarrow [x] = -۱ \Longrightarrow y = ۲(-۱) + ۱ = -۱$$
$$[۰, ۱) \Longrightarrow [x] = ۰ \Longrightarrow y = ۲(۰) + ۱ = ۱$$
$$[۱, ۲) \Longrightarrow [x] = ۱ \Longrightarrow y = ۲(۱) + ۱ = ۳$$

شکل تابع چنین رسم می شود:



شکل **۹.۵** شکل تابع پله‌ای $g(x) = ۲[x] + ۱$

۷.۲.۵ تابع پله‌ای واحد

تابع پله ای واحد بصورت زیر تعریف می شود.

$$u(x)=\begin{cases} 1 & , \quad \text{اگر } x\geq 0 \\ 0 & , \quad \text{اگر } x<0 \end{cases}$$

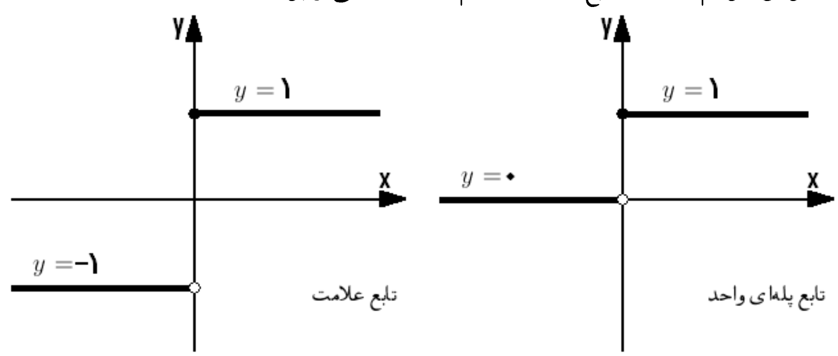
این تابع دارای استفاده های فراوانی در فیزیک است. نمودار این تابع دو ضابطه‌ای در شکل۱۰.۵ نشان داده شده است. دامنهٔ این تابع تمام اعداد حقیقی و برد آن $\{0,1\}$ می باشد.

۸.۲.۵ تابع علامت

تابع علامت، تابعی دو ضابطه ای بوده و بصورت زیر است:

$$sgn(x)=\begin{cases} 1 & , \quad x\geq 0, \\ -1 & , \quad x<0. \end{cases}$$

این تابع برای هر عدد حقیقی مانند x، علامت آن عدد را مشخص می نماید. مسلماً اگر عدد مثبت باشد علامت آن $+1$ و اگر عدد منفی باشد علامت آن -1 خواهد بود (صفر را عددی مثبت فرض کردیم). دامنهٔ تابع علامت، تمام اعداد حقیقی و برد آن $\{1,-1\}$ است.



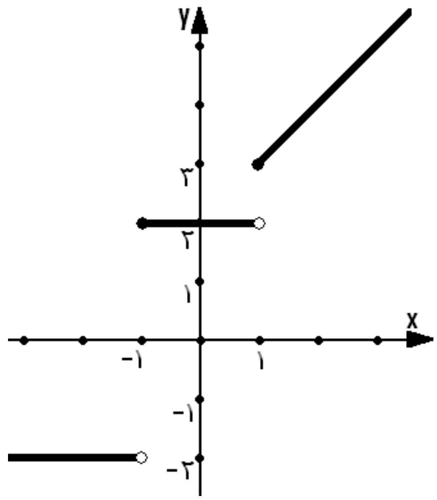
شکل ۱۰.۵ شکل توابع علامت و پله‌ای واحد

مثال ۱۶.۵ تابع $f(x)=x.u(x-1)+2sgn(x+1)$ را ساده و سپس رسم کنید.

حل.

$$\begin{aligned} f(x) &= xu(x-1)+2sgn(x+1) \\ &= x\begin{cases} 1 & , x-1\geq 0, \\ 0 & , x-1<0. \end{cases} +2\begin{cases} 1 & ,x+1\geq 0, \\ -1 & ,x+1<0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} x & , x\geq 1, \\ 0 & , x<1. \end{cases} +\begin{cases} 2 & , x\geq -1, \\ -2 & , x<-1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} -2 & , x<-1, \\ 2 & , -1\leq x<1, \\ x+2 & , x\geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

دقت کنید که توابع را روی نواحی مشترک جمع نمودیم. برد این تابع چیست؟

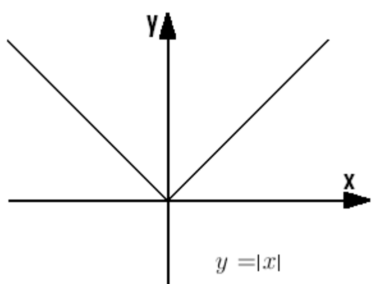


شکل ۱۱.۵ شکل تابع دو ضابطه‌ای مثال ۱۶.۵

۹.۲.۵ تابع قدرمطلق

قدرمطلق یا اندازهٔ مطلق یک عدد چنین بیان می شود که آن عدد را بدون در نظر گرفتن علامتش می نویسیم، بدین صورت که $|3| = 3$ و $|-5| = 5$ است. تابع قدرمطلق، تابعی دو ضابطه‌ای روی اعداد حقیقی است و بصورت زیر تعریف می شود:

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0, \\ -x & , \quad x < 0. \end{cases}$$



شکل ۱۲.۵ شکل تابع قدرمطلق

در واقع تعریف قدر مطلق چنین است که $|x| = \sqrt{x^2}$. از این تعریف، مشخص می شود که قدرمطلق هر عدد حقیقی، عددی مثبت بوده و $|x|^2 = x^2 = |x^2|$ و $-|x| \leq x \leq |x|$. همچنین

نتایج زیر دربارهٔ قدرمطلق حاصل می شود:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & |-a| = |a| & \\
(2) & |a-b| = |b-a| & \\
(3) & |ab| = |a|.|b| & \\
(4) & \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} & , \quad b \neq 0 \\
(5) & |a+b| \leq |a| + |b| & , \quad \text{نامساوی مثلثی} \\
(6) & |a-b| \geq |a| - |b| & \\
(7) & |a| = c \Longrightarrow a = \pm c & \\
(8) & |a| < c \Longrightarrow -c < a < c & , \quad c \geq 0 \\
(9) & |a| > c \Longrightarrow a < -c \ \text{یا} \ a > c & , \quad c \geq 0 \\
(10) & |x-k| < c \Longrightarrow -c < x-k < c & , \quad c \geq 0 \\
(11) & |x-k| > c \Longrightarrow x-k < -c \ \text{یا} \ x-k > c & , \quad c \geq 0
\end{array}
$$

موارد (۸) تا (۱۱) در حالتی که علامت تساوی است نیز برقرار است.

مثال ۱۷.۵ مطلوبست حل نامعادلهٔ $|x-2| \leq 4$

حل. طبق خاصیت (۸) بالا می نویسیم $-4 \leq x-2 \leq 4$ که با جمع سه طرف با عدد ۲ داریم $-2 \leq x \leq 6$ پس $[-2, 6]$ مجموعه جواب نامعادله خواهد بود.

مثال ۱۸.۵ مطلوبست حل نامعادلهٔ $|5-3x| = |x-3|$

حل. طبق خاصیت (۷)، $x-3 = \pm(5-3x)$ پس $x = 1$ و $x = 2$ جوابهای معادله‌اند.

مثال ۱۹.۵ مطلوبست حل نامعادلهٔ $|x-2| + |x+3| = 6$

حل. طبق تعریف قدرمطلق می نویسیم:

$$
\begin{aligned}
|x-2| + |x+3| &= \left\{\begin{array}{ll} x-2 & , x-2 \geq 0, \\ -x+2 & , x-2 < 0. \end{array}\right. + \left\{\begin{array}{ll} x+3 & , x+3 \geq 0, \\ -x-3 & , x+3 < 0. \end{array}\right. \\
&= \left\{\begin{array}{ll} x-2 & , x \geq 2, \\ -x+2 & , x < 2. \end{array}\right. + \left\{\begin{array}{ll} x+3 & , x \geq -3, \\ -x-3 & , x < -3. \end{array}\right. \\
&= \left\{\begin{array}{ll} -2x-1 & , \quad x < -3, \\ 5 & , -3 \leq x < 2, \\ 2x+1 & , \quad x \geq 2. \end{array}\right. \\
&= 6
\end{aligned}
$$

سه حالت فرض می کنیم:

$$\begin{array}{ll} x < -۳ \Rightarrow -۲x - ۱ = ٦ \Rightarrow x = -\frac{۷}{۲} < -۳ & \\ -۳ \leq x < ۲ \Rightarrow ۵ \neq ٦ & \Longrightarrow \quad x = -\frac{۷}{۲}, \frac{۵}{۲} \\ x \geq ۲ \Rightarrow ۲x + ۱ = ٦ \Rightarrow x = \frac{۵}{۲} \geq ۲ & \end{array}$$

تمرین ۳.۵ .

۱) توابع زیر را رسم کنید. دامنه و برد هر یک را مشخص نمائید.

$$\begin{array}{lcl} f(x) = sgn(x) + u(x) & , & g(x) = sgn(x) + xu(x + ۱) \\ h(x) = ۲[x] - x + ۱ & , & i(x) = ۲|x - ۱| + ۳sgn(x - ۱) - ۳u(x) \\ j(x) = [x] - |x| & , & k(x) = ۴sgn(x - ۳) - ۳u(x + ۳) + ۱ \end{array}$$

۲) معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{lcl} (a) \quad |x - ۱| = -۱ & , & (b) \quad \left|\frac{x - ۲}{x + ۲}\right| = ۱ \\ (c) \quad |٦x - ۱۳| < ۵ & , & (d) \quad |x - ٦| = ۳x + ۸ \\ (e) \quad |۹ - ۳x| = ۴|x - ۵| & , & (f) \quad |۳x + ۱| \geq |۲x - ۲| \\ (g) \quad \left|\frac{x + ۴}{۴x}\right| \geq ۱ & , & (h) \quad |x - ٦| \leq |۳x + ۸| + ۲ \\ (i) \quad |۲x - ۱| + |۲x + ۱| = ۴ & , & (j) \quad |x - ۴| + |۳x + ۱| \geq ۵ \end{array}$$

۱۰.۲.۵ توابع نمائی – توابع هذلولوی

تابع نمائی یا تابع توانی برای a حقیقی بصورت $f(x) = a^x$ تعریف شده و دارای خواص زیر است.

$$a^{۰} = ۱ \ , \ a^{۱} = a \ , \ a^{-n} = \frac{۱}{a^n} \ , \ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \ , \ a^m.a^n = a^{m+n} \ , \ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

در حالت خاص وقتی که بجای عدد a از عدد نپر e استفاده کنیم، تابع نمائی $f(x) = e^x$ حاصل می شود که خواص و کاربردهای ویژه‌ای در ریاضیات دارد. **توابع هذلولوی** سینوس هیپربولیک sinh و کسینوس هیپربولیک cosh توابعی هستند که حاصل مجموع و تفاضل توابع نمائی اند و چنین تعریف می شوند:

$$\sinh x = \frac{۱}{۲}(e^x - e^{-x}) \quad , \quad \cosh x = \frac{۱}{۲}(e^x + e^{-x})$$

می توان بررسی نمود که $D_{\sinh} = D_{\cosh} = R_{\sinh} = \mathbb{R}$ و $R_{\cosh} = [۱, +\infty)$.

۱۱.۲.۵ توابع لگاریتمی

تابع لگاریتم $y = \log_b^x$ است بطوریکه $x = b^y$. در اینجا b عددی حقیقی است و **پایهٔ لگاریتم** نامیده می شود، بعلاوه در حالت کلی می بایست x و b مثبت بوده و $b \neq ۱$ باشد. برای مثال

$$۱۰۰ = ۱۰^۲ \Longleftrightarrow \log_{۱۰} ۱۰۰ = ۲ \quad , \quad ۱۶ = ۲^۴ \Longleftrightarrow \log_۲ ۱۶ = ۴$$
$$۶۲۵ = ۵^۴ \Longleftrightarrow \log_۵ ۶۲۵ = ۴ \quad , \quad ۵۱۲ = ۲^۹ \Longleftrightarrow \log_۲ ۵۱۲ = ۹$$

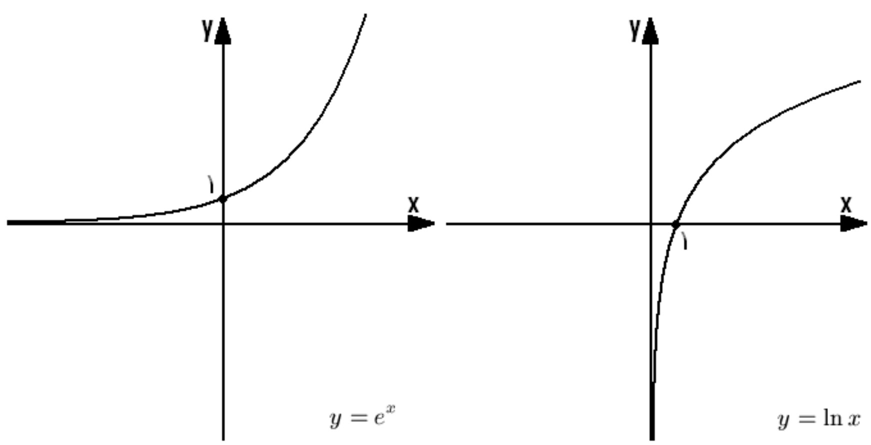
خواص لگاریتم برای x و y و a و b مثبت حقیقی و n طبیعی بصورت زیر است:

$$\log xy = \log x + \log y \quad , \quad \log \frac{x}{y} = \log x - \log y \quad , \quad \log x^n = n \log x$$
$$\log_b^۱ = ۰ \quad , \quad \log_b^b = ۱ \quad , \quad b^{\log_b^x} = x$$
$$\log_{b^x}^{a^y} = \frac{y}{x} \log_b^a \quad , \quad \log_b^a \times \log_a^b = ۱ \quad , \quad \log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$$

وقتی پایه نوشته نمی شود یعنی برابر ۱۰ است. در حالت خاص اگر پایهٔ b برابر e باشد، بجای $y = \log_e^x$ می نویسیم $y = \ln x$ و آنرا **لگاریتم نپری** یا **لگاریتم طبیعی** گوئیم. علاوه بر اینکه خواص بالا را می توان برای لگاریتم نپری مجدداً بازگو نمود، باید ذکر نمائیم که

$$e^{y \ln x} = x^y \quad , \quad e^{\ln x} = x \quad , \quad \ln e = ۱$$

و در موارد متعدد از آنها استفاده می شود. نمودار توابع نمائی و لگاریتمی بشکل زیر است.



شکل ۱۳.۵ نمودار توابع نمائی و لگاریتمی

مثال ۲۰.۵ مطلوبست حل معادلهٔ لگاریتمی $\log_{3}^{x-1}+\log_{3}^{x+1}=1$

حل. طبق خواص لگاریتم می نویسیم:

$$\begin{aligned}
\log_{3}^{x-1}+\log_{3}^{x+1} &= 1\\
\log_{3}^{(x-1)(x+1)} &= 1\\
\log_{3}^{x^{2}-1} &= 1\\
x^{2}-1 &= 3\\
x &= \pm 2\\
x &= 2
\end{aligned}$$

و مقدار $x=-2$ قابل پذیرش نیست زیرا لگاریتم روی اعداد مثبت تعریف شده است.

مثال ۲۱.۵ دامنهٔ تابع $y=2\log_{2x-3}^{x^{2}-4}$ چیست؟

حل. طبق تعریف لگاریتم می بایست $2x-3>0$ و $x^{2}-4>0$ و نیز $2x-3\neq 1$ باشد. با تعیین علامت و اشتراک این سه شرط چنین نتیجه می شود که

$$D_y=(\frac{3}{2},+\infty)\cap\Big[(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\Big]\cap\Big[\mathbb{R}-\{2\}\Big]=(2,+\infty)$$

تمرین ۴.۵ .

۱) عبارات لگاریتمی زیر را با استفاده از خواص لگاریتم ساده کنید.

$(a)\quad \log_{10}^{0/1}+2\log_{3}^{9}+\log_{2}^{8}$

$(b)\quad \log_{\sqrt{3}}^{81}-3\log_{\sqrt{5}}^{\sqrt[3]{(25)^{5}}}$

$(c)\quad \log_{2}^{30}+\log_{2}^{15}-\log_{2}^{9}$

$(d)\quad \log_{2}32+3\log_{2}64-2\log_{2}16$

$(e)\quad \log_{3}\sqrt[3]{4^{2}}-2\log_{9}\sqrt[4]{2}+4\log_{81}\sqrt[5]{16^{3}}$

$(f)\quad 4\log_{100}0/001-3\log_{100}\sqrt[5]{1000^{4}}+9\log_{10}\sqrt[6]{0/0001}$

$(g)\quad \log_{4}\sqrt[6]{2}\sqrt[4]{32}-\log_{48}\sqrt[5]{72\times 4\times 27}$

$(h)\quad \log_{\sqrt{5}}^{\sqrt[3]{(25)^{5}}}+\log_{2}^{30}-\log_{2}^{15}-\log_{2}^{8}$

۲) مطلوبست حل معادلات لگاریتمی زیر

$(i)\quad \log_{5}^{x}+\log_{5}^{x+4}=1 \quad , \quad (j)\quad \log_{3}^{x+2}-\log_{3}^{2x+1}=2$

لازم است که بدانید لگاریتم در بسیاری از علوم کاربرد دارد. یکی از دلایل استفاده از لگاریتم، مقایسهٔ دو کمیت فیزیکی با بعد یکسان است که در اینصورت خارج قسمت آنها عددی بدون واحد خواهد بود، لذا می توان از خارج قسمت آنها لگاریتم گرفت تا بتوان نسبت بسیار کوچک یا بسیار بزرگ آنها را با هم مقایسه کرد، بدون اینکه از ارقام و ضرایبشان استفاده شود. لگاریتم در علوم زیستی، نجوم، آمار، علوم کامپیوتر، زمین شناسی و علوم زیستی کاربرد دارد و در ذیل مختصری از آنها را ذکر می کنیم.

(زیست) مجرای درک صوت در جانوران گوش است چنانکه کار شنوائی را در انسان بعهده داشته و درون آن پردهٔ صماخ در برابر اصوات لرزش نشان داده و این لرزش مطابق بسامد صدا تبدیل به نوسان شده و به مغز می رسد. اما مکانیسم تشخیص صوت در جانداران گوناگون بستگی به فرکانس و شدت صوت دارد. آستانهٔ شنوائی انسان در یک شدت صوتی حدود $۱۰^{-۱۶}$ وات بر سانتیمتر مربع در ۱۰۰۰ هرتز روی داده و حد بالای بسامد صدا برای شنوائی نیز به شدت صوت بستگی دارد. گسترهٔ شنوائی یک انسان معمول، بین ۲۰ تا ۲۰۰۰۰ هرتز می باشد و در یک شدت مفروض، حد بالای بسامد معمولاً برای زنان بیشتر از مردان است.

برای مقایسهٔ بین شدت اصوات مختلف از **دسی بل** (db) استفاده می کنیم و در واقع دسی‌بل واحدی است برای تغییر حجم صدا. فرمول شدت صوت I چنین است:

$$I(db) = ۱۰ \log_{۱۰} \frac{I}{I_\circ}$$

که I شدت صوت بر حسب وات بر سانتیمتر مربع و $I_\circ$ آستانهٔ شنوائی در ۱۰۰۰ هرتز ($۱۰^{-۱۶}$ وات بر سانتیمتر مربع) است.

مثال ۲۲.۵ اگر شدت صوت مساوی آستانه شنوائی باشد، شدت را برحسب دسی بل پیدا کنید. همچنین ترازهای دسی بل متناظر با شدتهای ۱۰۰ برابر و یک میلیون برابر شدت آستانه را محاسبه نمائید.

حل. برای آستانهٔ شنوائی $I = ۱۰ \log_{۱۰} \frac{I_\circ}{I_\circ} = ۰$ و برای صوتی ۱۰۰ برابر شدت آستانه $I = ۱۰ \log_{۱۰} \frac{۱۰۰ I_\circ}{I_\circ} = ۲۰ db$ است. شدت صوتی یک میلیون برابر شدت آستانه معادل

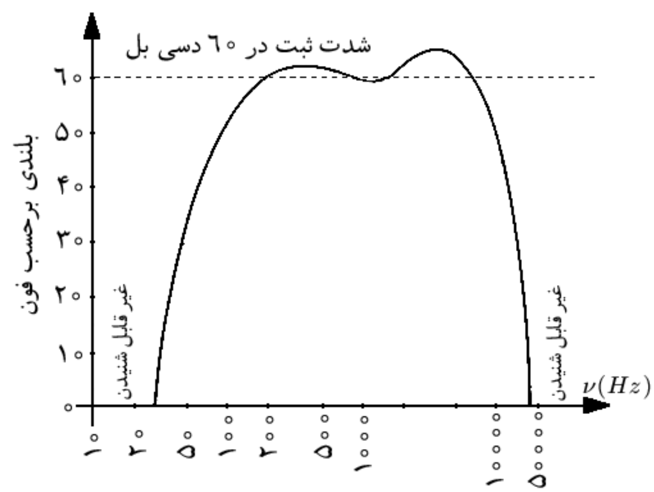
$$I = ۱۰ \log_{۱۰} \frac{۱۰۰۰۰۰۰ I_\circ}{I_\circ} = ۱۰ \log_{۱۰} ۱۰^{۶} = ۶۰ db$$

است.

هرچند اختلاف در شدت دو صوت تقریباً ۱ دسی بل است ولی در بسامدهای پائین انسان قادر است تا اختلاف ۱/۵ دسی بل و در بسامدهای بالا تا اختلاف ۰/۵ دسی بل را احساس نماید. جدول زیر حدود تقریبی ترازهای صوتی را نشان می دهد:

تراز دسی بل در $1000Hz$	مصداق صوت	مضرب شدت آستانه
۰	آستانه شنوائی	10^{1}
۲۰	اتاق کاملا ساکت	10^{2}
۴۰	موسیقی خیلی ملایم، اتاق نشیمن	10^{4}
۶۰	گفتگو	10^{6}
۸۰	سخنرانی کلاس، رادیو با صدای بلند	10^{8}
۱۰۰	آسیب به شنوائی، بلندترین قطعه ارکستر برای تماشاچی نزدیک	10^{10}
۱۲۰	آستانه درد	10^{12}
۱۴۰	درد شدید	10^{14}
۱۶۰	پاره شدن پرده صماخ	10^{16}

بلندی صوت را می توان احساس فیزیولوژیکی شدت صوت نامید. در یک بسامد معین صوت شدیدتر، بلندتر احساس می شود. مهم نیست که یک صوت با بسامد ۴۰۰۰۰ هرتز چه شدتی دارد زیرا بعنوان صوتی بلند احساس نخواهد شد و گوش انسان به این بسامد حساس نیست اگرچه ممکن است سبب درد شود. از آنجاکه درک صوت در شدتهای مختلف و در بسامدهای گوناگون، بسیار متفاوت است معیار درک را در ۱۰۰۰ هرتز برابر یک **فون** می گیرند و این معیار برابر همان مقدار دسی بل در این بسامد است لذا بلندی برحسب فون برابر است با شدت برحسب دسی بل در بسامد ۱۰۰۰ هرتز. در شکل۱۴.۵ نمودار بلندی صوت بر حسب فون بعنوان تابعی از بسامد ذکر شده و شدت ثبت در ۶۰ دسی بل است. نواحی غیر قابل شنیدن نیز در شدت ۶۰ دسی بل سنجیده شده است.



شکل ۱۴.۵ نمودار بلندی صدا برحسب فون بعنوان تابعی از بسامد برای یک منبع صوتی با شدت ثابت

دسی بل های صفر آستانه تراز شنوائی در ۱۰۰۰ هرتز است که بعنوان استاندارد $۱۰^{-۱۶}$ وات بر سانتیمتر مربع پذیرفته شده است. تراز درد $۱۰^{۱۲}$ تا $۱۰^{۱۳}$ برابر تراز آستانه است و بنابراین متناظر با ۱۲۰ تا ۱۳۰ دسی بل است. شدت صوت ایمن برای ارتباط بین ۴۰ تا ۱۰۰ دسی بل (از $۱۰^{۴}I_۰$ تا $۱۰^{۱۰}I_۰$) است.

(زمین شناسی) زلزله حاصل آزاد شدن انرژی ذخیره شده در لایه های زیرین زمین است. شدت وقوع زلزله در هر ناحیه بستگی به کانون و سرچشمهٔ زلزله و دامنهٔ آن دارد. با محاسبات لگاریتمی می توان انرژی آزاد شده بوسیلهٔ زلزله، دامنه و نیز محل کانون زلزله را ارزیابی کرد.

از طریق بزرگای زلزله می توان بطور نسبی زمین لرزه ها را با یکدیگر مقایسه نمود. بزرگای زمین لرزه مفهومی کمی و عددی است و با انرژی رهاشده از چشمهٔ زمین لرزه متناسب است ولی به فاصلهٔ چشمهٔ لرزه تا نقطهٔ مشاهده شده بستگی ندارد. مفهوم بزرگا اولین بار توسط لرزه‌شناس آمریکائی چارلز ریشتر[۱] در ۱۹۳۵م. عرضه شد که عبارتست از لگاریتم حداکثر دامنهٔ ارتعاش زمین برحسب میکرون یا میلیمتر که روی یک لرزه نگار در فاصلهٔ ۱۰۰ کیلومتری مرکز سطحی زمین ثبت شده باشد. طبق آن

$$M = \log_{۱۰} A_{Max} - \log_{۱۰} A_۰ = \log_{۱۰}\left(\frac{A_{Max}}{A_۰}\right)$$

در این رابطه A_{Max} حداکثر دامنهٔ موج ثبت شده روی لرزه نگار و $A_۰$ حداقل دامنهٔ موج ثبت شده توسط لرزه نگار در فاصلهٔ ۱۰۰ کیلومتری مرکز سطحی زمین است. طبق این رابطه بزرگای زمین لرزه می تواند صفر یا حتی منفی نیز باشد. معمولاً زمین لرزه های بیش از ۲ ریشتر توسط انسان قابل احساس است و تاکنون هیچ زمین لرزه بیش از ۹ ریشتر در هیچ جای جهان ثبت نشده است.

مثال ۲۳.۵ اگر حداکثر دامنهٔ ارتعاش زمین روی یک لرزه نگار معادل ۱۰ میلیمتر و دامنهٔ زمین لرزهٔ صفر $۱۰^{-۴}m$ باشد، بزرگای این زمین لرزه را تعیین کنید. اگر موج زمین لرزه‌ای روی دستگاه دارای دامنهٔ ۵ میلیمتر باشد این لرزه معادل چند ریشتر است؟ ($\log_{۱۰}^{۲} = ۰/۳۰۱$)

حل. بزرگای زمین لرزهٔ صفر معادل $M = \log_{۱۰}\left(\frac{۱۰^{-۳}}{۱۰^{-۴}}\right) = ۱$ ریشتر و لرزهٔ با دامنهٔ ۵ میلیمتر معادل

$$M = \log_{۱۰}\left(\frac{۵ \times ۱۰^{-۳}}{۱۰^{-۴}}\right) = \log_{۱۰}^{۵۰} = ۲ - \log_{۱۰}^{۲} = ۱/۷$$

ریشتر خواهد بود.

(شیمی) در شیمی تجزیه بارها با لگاریتم مواجه می شویم از آن جمله می توان به استفاده از لگاریتم در اندازه گیری pH، توابع P و معادلهٔ دبای—هوکل که با استفاده از آن می توان ضرایب فعالیت یون ها را از طریق بار و میانگین اندازهٔ آنها محاسبه کرد، اشاره نمود.

[۱] $Richter$

غلظت $H^+(aq)$ در یک محلول را بر اساس مقیاس pH بیان کرده و چنین تعریف می شود:

$$pH = -\log_{۱۰}[H^+]$$

بطور پیشفرض مقدار pH آب برابر ۷ تعریف شده و خنثی است پس غلظت OH نیز برابر با $-\log_{۱۰}[OH^-]$ بوده و

$$p(H_۲O) = pH + pOH = ۱۴$$

در مفهوم آرنیوسی مقدار pH اسیدها بین ۱ تا ۷ و بازها از ۷ تا ۱۴ بیان می گردد.

مثال ۲۴.۵ اگر غلظت $[H^+]$ محلولی برابر $۱۰^{-۵}$ باشد مقدار pH محلول، غلظت $[OH^-]$ و نیز pOH محلول را بیابید.

حل. چون

$$pH = -\log_{۱۰}[H^+] = -\log_{۱۰} ۱۰^{-۵} = ۵$$

و از آنجاکه $pH + pOH = ۱۴$ پس $pOH = ۹$ و غلظت $[OH^-]$ برابر $۱۰^{-۹}$ خواهد بود.

مثال ۲۵.۵ برای محلول یکصدم مولی $NaOH$ که بازی قوی است $[OH^-] = ۱۰^{-۲}$ که داریم $pOH = -\log_{۱۰}[OH^-] = ۲$ و چون مجموع pH و pOH یک محلول در ۲۵^oC برابر ۱۴ است لذا $pH = ۱۲$.

(نجوم) در اخترشناسی جهت اندازه گیری فاصلهٔ ستارگان از زمین و تناسب این فاصله با مقدار روشنائی آنها از لگاریتم بهره گرفته می شود. می دانیم که چشم انسان قادر است ستارگان با قدر حداکثر شش را ببیند و مسلماً این قدر ظاهری با قدر مطلق روشنائی ستاره بسیار متفاوت است و هرچه ستاره دورتر باشد کم سوتر بنظر خواهد رسید. برای ستاره‌ای با قدر ظاهری m و قدر مطلق M رابطهٔ زیر حکمفرماست:

$$M - m = ۵\log_{۱۰}\frac{۱۰Pc}{d}$$

که d فاصلهٔ ظاهری ستاره از ما برحسب پارسک است. هم چنین برای دو ستاره که یکی با شدت $I_۱$ از قدر $m_۱$ و دیگری با شدت $I_۲$ از قدر $m_۲$ است می توان جهت مقایسه رابطهٔ زیر را بکار برد:

$$m_۲ - m_۱ = ۲/۵\log_{۱۰}\frac{I_۱}{I_۲}$$

مثال ۲۶.۵ ضعیفترین ستارگانی را که می توان با تلسکوپ ۲۰۰ اینچی رصدخانه مونت پالومار کالیفرنیا عکس گرفت دارای قدری حدود ۲۳/۵ اند. این تلسکوپ چند برابر از چشم غیرمسلح حساستر است.

حل. برای چشم معمولی $m = ۶$ بوده و

$$۲۳/۵ - ۶ = ۲/۵ \log_{۱۰} \frac{I_۱}{I_۲} \Rightarrow \frac{I_۱}{I_۲} = ۱۰^{۷}$$

یعنی این تلسکوپ ۱۰ میلیون بار از چشم معمولی حساستر است.

مثال ۲۷.۵ شعرای یمانی نورانی ترین ستاره آسمان با قدر ۱/۴− و سهیل اولین ستارهٔ روشن پس از آن از قدر ۰/۷− است. شدت درخشندگی شعرای یمانی چند برابر ستارهٔ سهیل است؟

حل. $-۱/۴ - (-۰/۷) = ۲/۵ \log_{۱۰} \frac{I_۱}{I_۲} \Rightarrow \frac{I_۱}{I_۲} = ۰/۵۳ \Rightarrow I_۱ = ۰/۵۳ I_۲$

مثال ۲۸.۵ نشان دهید که با تقریبی بسیار عالی، کاهش یک واحد از قدر یک ستاره نظیر به ۲/۵ بار افزایش در شدت نور آنست.

حل.

$$m - ۱ - m = ۲/۵ \log_{۱۰} \frac{I_۱}{I_۲} \Rightarrow \frac{I_۱}{I_۲} = ۱۰^{-\frac{۲}{۵}} = \frac{۱}{\sqrt[۵]{۱۰۰}} = \frac{۱}{۲/۵۸۱}$$

و در نتیجه $I_۲ = ۲/۵ I_۱$.

۳.۵ مقیاس لگاریتمی

مانند تابع پرکاربرد لگاریتم، بسیاری از نمونه های طبیعی و جامعه شناسی از تابع نمائی پیروی می کنند مانند رشد جمعیت. توابع لگاریتمی و نمائی در مطالعهٔ بسیاری از مسائل فیزیکی وارد می شوند. در زمین شناسی نیز بطور گسترده‌ای ارقام بدست آمده از نمونه های زمین شناختی و فسیلی تابعی نمائی محسوب شده و از آن بهره می گیرند مثل $N(t) = N_\circ e^{rt}$ که مبین رشد و $N(t) = N_\circ e^{-rt}$ که نشاندهندهٔ زوال برحسب گذشت زمان t است. نمونه هائی را در بخش های ۱.۴.۱۱ و ۴.۴.۱۱ ذکر خواهیم کرد.

مانند آنچه در بخش ۳.۴ روی دو متغیر که با هم رابطه ای خطی داشتند اجرا شد در بسیاری از موارد عملی و آزمایشگاهی دیده می شود که دو متغیر x و y با هم رابطهٔ خطی مشخصی ندارند. در اینگونه موارد اعداد حاصل از آزمایش نشان می دهد که یکی و یا هر دو متغیر x و y با مقیاسی لگاریتمی، رابطه ای خطی داشته و می توان بین آندو فرمول معینی ایجاد نمود. به نمودار حاصل از یک متغیر و لگاریتم متغیر دیگر **نمودار نیمه لگاریتمی** گوئیم.

تابع نمائی $y = aq^x$ را در نظر گرفته و با شرط $a > ۰$ و $q > ۰$ از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$$\log y = \log a + x \log q$$

در اینجا پایهٔ لگاریتم هر عدد دلخواه مثبتی (بجز ۱) می تواند باشد اما ترجیحاً از پایه ۱۰ استفاده می کنیم. با فرض $Y = \log y$ نمودار نیمه لگاریتمی $Y = mx + h$ نموداری خطی خواهد بود که $m = \log q$ شیب خط و $h = \log a$ عرض از مبداء آنست. در عمل وقتی مقادیر y صفر یا منفی است با فرضی مانند $Y = \log(y + k)$ نمودار نیمه لگاریتمی را برازش خواهیم داد (k عددی مثبت است).

مثال ۲۹.۵ مقادیر حاصل از یک آزمایش تجربی در جدول زیر نوشته شده است. با ترسیمی نیمه لگاریتمی نشان دهید رابطهٔ نمائی بین این دو مقدار وجود داشته و آن را برآورد نمائید.

x محلول (mgr)	۱/۵	۲/۵	۳/۵	۴/۵	۵/۵	۶/۵	۷/۵
y دقیقه (min)	۰	۰/۴۷	۲/۸	۲۰/۴	۵۳/۲	۱۴۰	۲۹۳

حل. وجود رشد زیاد مقادیر در سطر دوم نشان می دهد که رابطهٔ دو متغیر خطی نیست. با فرض $Y = \log(y + ۱)$ جدول داده ها را بصورت زیر تغییر می دهیم:

x	۱/۵	۲/۵	۳/۵	۴/۵	۵/۵	۶/۵	۷/۵
Y	۰	۰/۱۶۷۳	۰/۵۷۹۸	۱/۳۳۰۴	۱/۷۳۴۰	۲/۱۴۹۲	۲/۴۶۸۴

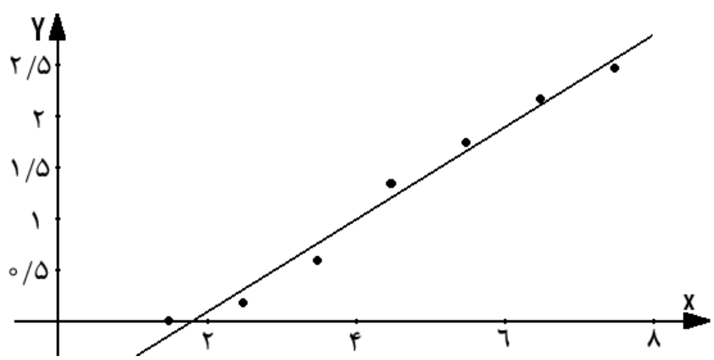
نقاط حاصل را طبق الگوی بخش ۳.۴ برازش داده و خط برازش بصورت

$$Y = ۰/۴۴۷۳x - ۰/۸۰۸۵$$

بدست می آید. نمودار نیمه لگاریتمی و خط برازش بشکل ۱۵.۵ است. همچنین

$$\log(y + ۱) = ۰/۴۴۷۳x - ۰/۸۰۸۵$$

و بنابراین $y = ۰/۱۵۵۴e^{۱/۰۲x} - ۱$ بهترین الگوی نمائی برای نمایش این داده هاست.



شکل ۱۵.۵ نمودار نیمه لگاریتمی نتایج آزمایش مثال ۲۹.۵ و خط برازش حاصل از آن

گاهی نتایج حاصل از آزمایش نشان می دهد که هر دو متغیر x و y با مقیاسی لگاریتمی، رابطه‌ای خطی دارند. به نمودار حاصل **نمودار لگاریتم مضاعف** یا **نمودار** $\log - \log$ گوئیم. تابع $y = ax^m$ را در نظر گرفته و با شرط $a > ۰$ از طرفین آن لگاریتم می گیریم:

$$\log y = \log a + m \log x$$

در اینجا نیز پایهٔ لگاریتم را ترجیحاً ۱۰ در نظر گرفته و با فرض $X = \log x$ و $Y = \log y$ تابع خطی $Y = mX + h$ را با شیب m و عرض از مبداء $h = \log a$ در صفحه رسم کرده که نموداری $\log - \log$ است. برای مقادیر x یا y صفر یا منفی (حداکثر k) با فرضهائی مانند $X = \log(x + k)$ و یا $Y = \log(y + k)$ نمودار $\log - \log$ را ساخته و داده ها را برازش خواهیم داد.

مثال ۳۰.۵ (زیست) انرژی مصرف شده برای دویدن در مورد چندگونه جاندار اندازه گیری شده است. فرض کنید E انرژی مصرفی برای حمل یک گرم از وزن بدن در ۱ کیلومتر $(\frac{J}{g.km})$ و M وزن بدن جانور (gr) باشد. داده های تجربی زیر بدست آمده است. نمودار $\log - \log$ را ترسیم نموده و خط راستی را با آن برازش دهید.

جانور	M(g)	$E(\frac{J}{g.km})$
موش سفید	۲۱	۵۴
سنجاب زمینی	۲۳۶	۱۵
موش صحرائی سفید	۳۸۴	۱۸
سگ (کوچک)	$۲/۶ \times ۱۰^{۳}$	۷/۱
سگ (بزرگ)	$۱/۸ \times ۱۰^{۴}$	۳/۹
گوسفند	$۳/۹ \times ۱۰^{۴}$	۲/۴
اسب	$۵/۸ \times ۱۰^{۵}$	۰/۶۳

حل. از ستون های E و M لگاریتم گرفته و در جدول زیر مقادیر $x = \log_{۱۰}^{M}$ و $y = \log_{۱۰}^{E}$ را نوشته‌ایم:

x	۱/۳۲۲	۲/۳۷۳	۲/۵۸۴	۳/۴۱۵	۴/۲۵۵	۴/۵۹۱	۵/۷۶۳
y	۱/۷۳۲	۱/۱۷۶	۱/۲۵۵	۰/۸۵۱	۰/۵۹۱	۰/۳۸۰	−۰/۲۰۱

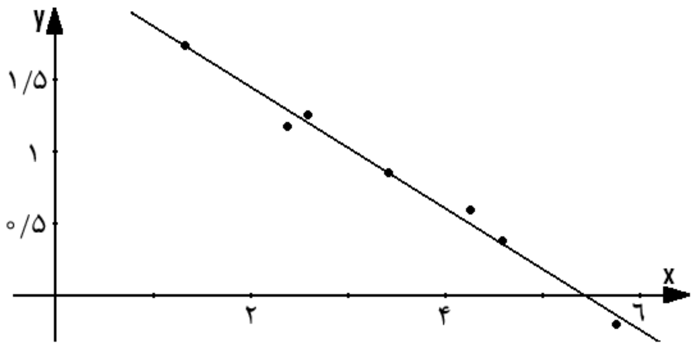
نقاط جدول را برازش داده و خط برازش بمعادلهٔ $y = -۰/۴۱۹x + ۲/۲۸$ است. نمودار $\log - \log$ و خط برازش بشکل۱۶.۵ رسم شده است. همچنین

$$\log_{۱۰}^{E} = -۰/۴۱۹ \log_{۱۰}^{M} + ۲/۲۸$$

پس

$$۱۰^{\log_{۱۰}^{E}} = ۱۰^{-۰/۴۱۹\log_{۱۰}^{M}} \times ۱۰^{۲/۲۸}$$

و در نتیجه $E = \dfrac{۱۹۰/۵۵}{M^{۰/۴۱۹}}$ بهترین الگو برای نمایش این داده هاست.



شکل ۱۶.۵ نمودار لگاریتم مضاعف از نتایج آزمایش مثال بالا و خط برازش آن

تمرین ۵.۵ تکمیلی.

۱) برای توابع زیر ضابطه ای بیان کنید؟

$$f = \{(۱, ۰/۵), (۲, ۱), (۳, ۱/۵), (۴, ۲), (۵, ۲/۵), \cdots\}$$
$$g = \{(۱, ۲), (۲, ۸), (۳, ۱۸), (۴, ۳۲), (۵, ۵۰), \cdots\}$$
$$h = \{(۱, ۰), (۲, -۱), (۳, -۲), (۴, -۳), (۵, -۴), \cdots\}$$

۲) دامنهٔ توابع زیر را بدست آورید.

$$f = \{(۰, ۰), (۱, ۰), (۲, ۰), (۳, ۰), (۴, ۰), \cdots\}$$
$$g(x) = ۳ + \frac{۱}{x^۲} \quad , \quad h(x) = \sqrt{\frac{۴}{۳ - x}}$$
$$i(x) = \frac{\sqrt{x + ۱}}{x} \quad , \quad j(x) = ۲\log_{x-۲}^{x^۲-۱}$$
$$k(x) = \sqrt{(x - ۱)^۲} + \sqrt{-x} \quad , \quad l(x) = \frac{\sqrt{x^۲ - ۹}}{\sqrt{x - ۳}}$$
$$m(x) = \sqrt{x}.\sqrt{x^۲ + ۴x + ۴} \quad , \quad n(x) = \sqrt{x} + \log_{x+۱}^{۹-x^۲}$$
$$o(x) = \ln\frac{x - ۱}{۴x + ۴} \quad , \quad p(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}} - ۱}$$
$$q(x) = \log_{\sqrt{۵-x}}^{\frac{۲x}{x+۳}} \quad , \quad r(x) = \ln(۳۶ - x^۲)$$

۳) توابع زیر را با نقطه یابی یا روشهای دیگر رسم کنید.

$$(a)\quad y = ۲ - x^{۲} \qquad , \qquad (b)\quad y = ۲x^{۲} + ۳x - ۷$$

$$(c)\quad y = x^{۲} + ۴x - ۱ \qquad , \qquad (d)\quad y = x^{۲} + x - ۱$$

$$(e)\quad y = sgn(x+۱) + ۲u(x) \qquad , \qquad (f)\quad y = sgn(x) - u(x-۲)$$

$$(g)\quad y = [x] + x^{۲} + ۱ \qquad , \qquad (h)\quad y = ۲sgn(x-۱) - ۳u(x) + ۱$$

$$(i)\quad y = \ln|x| \qquad , \qquad (j)\quad y = ۲|x| + xsgn(x) + u(x+۱)$$

$$(k)\quad y = x - [x] \qquad , \qquad (l)\quad y = ۳\left[\frac{x}{۲}\right] - ۴$$

$$(m)\quad y = \begin{cases} x^{۲} & , x \le ۰, \\ x+۱ & , x > ۰. \end{cases} + \begin{cases} x-۱ & , x \le ۲, \\ ۲ - x^{۲} & , x > ۲. \end{cases}$$

$$(n)\quad y = \begin{cases} \sqrt{-x} & , x < -۱, \\ \dfrac{۱}{x} & , -۱ \le x < ۰, \\ x^{۲} & , x \ge ۰. \end{cases} \times \begin{cases} x & , x \le ۱, \\ \dfrac{۱}{\sqrt{x}} & , x > ۱. \end{cases}$$

۴) برد توابع زیر را مشخص نمائید.

$$f(x) = \frac{۴x}{x+۱} \quad , \quad g(x) = ۳x^{۲} + x - ۲۰ \quad , \quad h(x) = ۶x^{۴} + x^{۲}$$

$$i(x) = \frac{۲\sqrt{x} - ۱}{\sqrt{x} - ۲} \quad , \quad j(x) = ۴\sqrt{x} + ۴x + ۳ \quad , \quad k(x) = \frac{x^{۲}}{x^{۲} + ۵}$$

۵) آیا توابع $f(x) = x$ و $g(x) = \sqrt{x}\sqrt{x}$ مساویند؟

۶) نقطهٔ تلاقی منحنی های $y = e^{x} - ۱$ و $y = ۱ - e^{-x}$ را بیابید.

۷) محل برخورد دو منحنی $y = \dfrac{\ln x}{۴x}$ و $y = x \ln x$ را پیدا کنید.

۸) کدام بزرگترند $\log_a^{۲}$ یا $\log_a^{۳}$ ؟

۹) ثابت کنید $\log_b^a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.

۱۰) اگر بدانیم $\log_{۱۰}^{۲} = ۰/۳$ و $\log_{۱۰}^{۵} = ۰/۷$ مقدار عبارات زیر را بدست آورید

$$\log_{۱۰}^{۲۰} \quad , \quad \log_{۱۰}^{۸۰} \quad , \quad \log_{۱۰}^{۱۰۲۴} \quad , \quad \log_{۱۰}^{۱۲۵۰} \quad , \quad \log_{۱۰}^{۵۰۰۰}$$

۱۱) اگر بدانیم $\log_{۱۰}^{۲} = a$ و $\log_{۱۰}^{۷} = b$ مطلوبست مقدار $\log_{۸}^{۹/۸}$؟

۱۲) برای x–های مثبت ثابت کنید $e^{\ln x} = x$.

۱۳) برای همهٔ x های حقیقی ثابت کنید $\ln e^x = x$.

۱۴) معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$(a)\quad |x+2| = 5 \quad , \quad (b)\quad |x-4| \geq 2$

$(c)\quad |2x-1| > 1-x \quad , \quad (d)\quad |x-2| \leq 4x$

$(e)\quad |x+2| \leq |x-3| \quad , \quad (f)\quad |x-2| = 3x+5$

$(g)\quad \left|\dfrac{x+2}{x}\right| \geq x \quad , \quad (h)\quad \left|\dfrac{x+2}{3x}\right| < 5$

$(i)\quad x^2 < |2x-8| \quad , \quad (j)\quad \Big||x+1|-1\Big| > 3$

$(k)\quad |x-1|+|x+1| = 2 \quad , \quad (l)\quad |2x+3|-|x-4| = 1$

$(m)\quad |x-1|+|2x+1| \geq 2 \quad , \quad (n)\quad |x-1|+|x+1|+|2x| = 1$

$(o)\quad 27^x + 12^x = 2 \times 8^x \quad , \quad (p)\quad \dfrac{1}{\sqrt[x]{4}} + \dfrac{1}{\sqrt[x]{6}} = \dfrac{1}{\sqrt[x]{9}}$

$(q)\quad 2\log_4^x + \log_4^{x^2-3} = 1 \quad , \quad (r)\quad \log_4^{x+1} - \log_4^{2x+4} = 2$

$(s)\quad 2^{x-1} + 2^{x+1} = 20 \quad , \quad (t)\quad \log_2(x+5) + \log_2(x+3) = 3$

$(u)\quad \log_3 \log_4 \log_5 x = 2 \quad , \quad (v)\quad \log_x \dfrac{x^2+8}{x+1} = 2$

$(w)\quad x^2 + |x| = 12 \quad , \quad (x)\quad \Big||x+5|-4\Big| = 2$

$(y)\quad [x-1] = 6 \quad , \quad (z)\quad 4[x]+3 < 5[x]-2$

$(\alpha)\quad 4e^{2x-1} = 20 \quad , \quad (\beta)\quad e^{x\ln 5} = 125$

$(\gamma)\quad 4^{x\ln 2} = e^{e^{\ln 1}} \quad , \quad (\delta)\quad e^{4\ln 1} = 20x + \ln\big|1-\ln 1\big|$

۱۵) اگر $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ مقادیر $f(1)$ و $f(f(1))$ و $f(f(f(1)))$ چیست.

۱۶) جواب دستگاه‌های زیر را بیابید.

$(a)\quad \begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ 2x - y + 1 = 2e. \end{cases} \quad , \quad (b)\quad \begin{cases} \ln x - \ln y = 2 \\ 2x - y = 4(e-1). \end{cases}$

۱۷) ثابت کنید $sgn(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

۱۸) تکه‌ای طلای نشسته k درصد طلای خالص دارد. بعد از هر بار شستشو p درصد از ناخالصی و q درصد از طلای خود را از دست می دهد. چند بار باید شستشو را تکرار کنیم تا درصد طلای خالص از هر تکه کمتر از r نباشد.

۱۹) **(فیزیک)** جسمی از ارتفاع h سقوط می کند و پس از t ثانیه به سطح زمین می رسد. تابع ارتفاع بر حسب متر بصورت $y = -\frac{۱}{۲}gt^{۲} + h$ بیان می شود. هرچند g با موقعیت جغرافیائی تغییر می کند، ولی در محاسبات معمول آن را برابر $۹/۸\frac{m}{s^{۲}}$ در نظر می گیریم. لذا می توان گفت که تابع ارتفاع جسم در حال سقوط تابعی از زمان بوده و با ضابطهٔ $y(t) = -۴/۹t^{۲} + h$ دارای شکلی سهمی است. شکل آنرا در دستگاه مختصات رسم کنید.

۲۰) **(فیزیک)** جذب نور توسط آب دریا از قانون $I(x) = I_{\circ}e^{-kx}$ تبعیت می کند که $I_{\circ}$ شدت نور در سطح دریا، $I(x)$ شدت در عمق x متری و k ضریب جذب است. k را چنان بیابید که شدت نور در عمق ۵ متری، یکهزارم شدت نور در سطح دریا باشد.

۲۱) **(زمین شناسی)** برای محاسبهٔ عمق کانون زلزله چند رابطهٔ تجربی وجود دارد که یکی از آنها چنین است:

$$M = ۱/۵ + ۳\log_{۱\circ}\left(\frac{r^{۲}}{H^{۲}} + ۱\right)$$

که M بزرگای زلزله، r شعاع منطقه تحت تاثیر و H عمق کانون آنست. اگر شهر A را لرزه‌ای با شدت ۴ ریشتر بلرزاند و دامنهٔ لرزه شهر B را در فاصلهٔ ۵۰ کیلومتری تحت تاثیر قرار دهد سرچشمهٔ این لرزه چند کیلومتر زیر سطح زمین واقع شده است؟

۲۲) **(شیمی)** (الف) مقدار pH یک محلول $\circ/\circ۵M$ از H^{+} را بیابید. (ب) مقدار pOH یک محلول که $[OH^{-}]$ آن $\circ/\circ۳M$ باشد را بدست آورید. (ج) pH محلول $\circ/۱۲M$ از $HOCN$ چقدر است؟

۲۳) **(شیمی)** نشان دهید غلظت H^{+} در یک محلول $\circ/۱M$ اسیداستیک که نسبت به سدیم استات $NaC_{۲}H_{۳}O_{۲}$ است برابرست با $۱/۲ \times ۱\circ^{-۵}M$.

۲۴) **(شیمی)** pH یک محلول $\circ/۲۶M$ اسید ضعیف HX برابر ۲/۸۶ است. ثابت یونش HX چقدر است؟

۲۵) **(زیست)** وقتی دارو در ماهیچه (عضله) تزریق می شود غلظت آن در خون در لحظهٔ t پس از تزریق از تابع $f(t) = C\left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right)$ محاسبه می شود. نمودار f را برای $t \geq \circ$ و α و β مختلف رسم کرده و توضیح دهید چرا نمودار این تابع نمی تواند الگوی مناسب در توزیع داروی تزریقی در عضله باشد (α، β و C مقادیری ثابت مثبتند).

۲۶) **(شیمی)** طبق معادلهٔ کلازیوس–کلاپیرون در یک فاصلهٔ دمائی نسبتاً کوچک، آنتالپی تبخیر یک مایع $\Delta H_v \frac{kJ}{mol}$ را تقریباً می توان ثابت فرض نمود و در این حالت بین فشار $P(atm)$ و دما $T(K)$ داریم:

$$\log_{۱۰} P = -\frac{\Delta H_v}{۲/۳۰۳RT} + C$$

که $R = ۸/۳۱۴\frac{J}{K.mol}$ و C ثابت ویژهٔ مایع است. در آزمایشی می خواهیم آنتالپی تبخیر $CS_۲$ را در فاصلهٔ دمائی ۰^oC تا ۳۰^oC بیابیم. بدین منظور در دماهای متفاوتی، فشار بخار این گاز را اندازه گیری نموده و در جدول زیر آورده ایم:

$T(^oC)$	۲	۵	۱۰	۱۵	۱۸	۲۲	۲۵
$P(atm)$	۰/۱۹	۰/۲۱	۰/۲۶	۰/۳۲	۰/۳۵	۰/۴۲	۰/۴۸

با رسم نمودار نیمه لگاریتمی P بر حسب $-\frac{۱}{۲/۳۰۳RT}$ از فرمول

$$\log_{۱۰} P = -\frac{۱}{۲/۳۰۳RT}\Delta H_v + C$$

مقادیر ΔH_v و C را بیابید.

۲۷) **(زیست)** فعالیت آنزیمی کاتالاز هنگامی که در معرض نور خورشید قرار می گیرد با حضور اکسیژن از بین می رود. طی آزمایشی، غلظت کاتالاز y بر حسب زمان t (دقیقه) بشکل جدول زیر حاصل شده است:

t زمان (min)	۰	۱۰	۳۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰
y کاتالاز $(\frac{\mu gr}{۱۰ml})$	۱۲۱	۷۴	۳۰	۱۲	۶/۷	۳/۷	۲/۰

با رسم نیمه لگاریتمی، رابطهٔ y را بر حسب t بیابید.

۲۸) **(فیزیک)** با حرکت اجسام در هوا، وجود هوا در برابر حرکت اجسام نیروی مقاوم محسوب شده و از حرکت آنها جلوگیری می کند. عوامل موثر در مقاومت هوا عبارتند از سطح برخورد جسم با هوا، شکل جسم، سرعت جسم و چگالی هوا. اجسامی که نیروی مقاوم هوا در برابر آنها کم است را اجسام «آئرودینامیک» نامند. بطور معمول می توان برای جسمی با سرعت $v(\frac{m}{s})$ نیروی مقاوم هوا $f_s(N)$ را چنین بیان کرد:

$$\begin{array}{lcl} ۵\frac{cm}{s} < v < ۵۰\frac{cm}{s} & \Rightarrow & f_s \propto v \\ ۵۰\frac{cm}{s} < v < ۵۰\frac{m}{s} & \Rightarrow & f_s \propto v^۲ \\ ۵۰\frac{m}{s} < v < ۵۰۰\frac{m}{s} & \Rightarrow & f_s \propto v^۳ \end{array}$$

فرمول معمول برای محاسبهٔ این نیروی مقاوم $f_s = kSv^m$ است که k ضریبی متناسب با شکل جسم و چگالی هوا و S نیز بزرگترین سطح مقطع جسم است. توان m برای سرعت می تواند هر عدد حقیقی بیشتر از یک باشد. ضریب k برای صفحه ۰/۸۵، برای کره ۰/۰۳ و برای اجسام آئرودینامیک ۰/۰۰۳ است. در آزمایشی از جسمی آئرودینامیک، در سرعتهای مختلف مقدار نیروی f_s طبق زیر بدست آمده است:

$v(\frac{m}{s})$	۵۰	۷۵	۱۰۰	۱۲۵	۱۵۰	۱۷۵	۲۰۲
$f_s(N)$	۲/۳	۵/۱	۱۰/۱	۱۵/۷	۲۲/٦	۳۰/۳	۴۵/۰

نمودار $\log - \log$ از f_s بر حسب v ترسیم نموده و خط راستی با آن برازش دهید. مقدار توان m و ضریب kS جسم را برآورد کنید. اگر مقدار بزرگترین سطح مقطع جسم ۵۰۰ سانتیمتر مربع باشد شکل این جسم چقدر به شکل آئرودینامیکی نزدیک است.

۲۹) **(زیست)** آمین بیوژنیک «سروتونین» با پایداری هیجانات در انسان مرتبط است. برای اندازه گیری سروتونین بمقدار کم روشی مبتنی بر بازدارندگی برخی فعالیت های شیمیائی بوجود آمد. داده های زیر در رابطهٔ سروتونین (بر حسب نانوگرم) و میزان بازدارندگی است:

x سروتونین (ngr)	۱/۲	۳/٦	۱۲	۳۳
y بازدارندگی $(\%)$	۱۹	۳٦	٦۰	۸۴

با رسم نیمه لگاریتمی (سروتونین محور افقی) رابطه ای نمائی برای این هماهنگی یافته و مقدار سروتونینی را که باعث ۵۰% بازدارندگی است را برآورد نمائید.

۳۰) **(زیست)** داده سنجی نشان داده که اگر x و y اندازهٔ دو عضو از یک حیوان باشند آنگاه x و y توسط **معادلهٔ آلومتریک** بصورت

$$\ln y - k \ln x = \ln C$$

مرتبطند. k و C ثابتند و بسته به حیوانات گونه های مشابه، یکسانند. یک تئوری بیان می کند که وزن مار W بایستی متناسب با مکعب طول آن L باشد. برای بررسی این نظریه، در چند نمونه از یک نوع مار[۲]، وزن و طول آنها طبق زیر بدست آمده است:

$L(cm)$	۳۷	۴۲	۴٦	۵۱	۵٦	٦۰	٦۱	٦۴
$W(gr)$	۲۴	۳۴	۴۵	٦۱	۸۰	۹۷	۱۰۲	۱۱۷

نمودار $\log - \log$ از وزن مار بر حسب طول آن ترسیم نموده و خط راستی با آن برازش دهید. معادلهٔ آلومتریک متناسب آنرا نتیجه بگیرید.

[۲] *Heterodon Nasicus*

فصل ٦

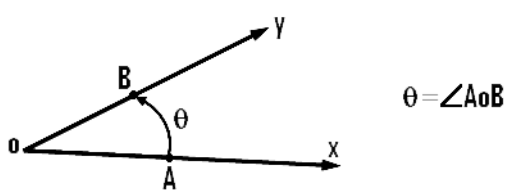
مثلثات

بجرأت می توان گفت که مثلثات، حجم عظیمی از حساب دیفرانسیل و انتگرال را بر عهده دارد. منشاء این مبحث اخترشناسی و محاسبات نجومی است چنانکه کهن ترین جداول نجومی بر پایهٔ مثلثات، به ابرخس و منلائوس در سده دوم میلادی بر می گردد. سه دهه بعد ریاضیدانی هندی سینوس را تعریف نمود و خوارزمی نخستین جداول سینوسی را تنظیم کرد و پس از او ریاضیدانان ایرانی گامهایی در جهت تکمیل این جداول و گسترش مفاهیم مثلثاتی برداشتند. ریاضیدانان مسلمان نقش عمده‌ای در پیشبرد مثلثات ایفا نمودند و این بحث اکنون از مباحث پایهٔ ریاضیات است.

١.٦ زاویه

١.١.٦ زاویه و اجزاء آن

زاویه از دوران یک نیمخط بدست می آید. نیمخط Ox و نقطهٔ A روی آن را در نظر بگیرید. اگر نیمخط Ox حول O چنان گردش کند که نقطهٔ A بتواند بر نقطه‌ای مانند B منطبق شود گوئیم زاویهٔ $\angle AOB$ بدست آمده است. نقطهٔ O را **رأس زاویه** $\angle AOB$ نامیده و چنانچه نیمخط Ox حول O چنان گردش کند که بر خودش منطبق گردد این زاویه را **یک دور کامل** گوئیم.

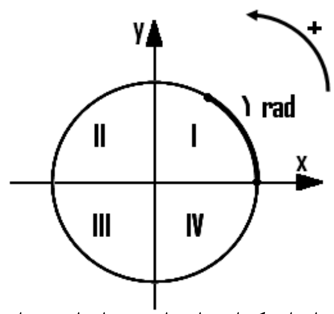


شکل ١.٦ زاویه از گردش نیمخط حول یک نقطه حاصل می شود.

درجه زاویه ای است که از دوران یک نیمخط حول راس باندازه $\frac{۱}{۳۶۰}$ یک دوران کامل بدست آید و آنرا با $(^o)$ نشان می دهیم. اجزای درجه عبارتند از دقیقه $(')$ که یک $\frac{۱}{۶۰}$ درجه و ثانیه $('')$ که $\frac{۱}{۳۶۰۰}$ درجه است و برای مثال می نویسیم $\angle AOB = ۲۳^o۴۵'۵۶''$.

گراد زاویه ای است که از دوران یک نیمخط حول راس باندازه $\frac{۱}{۴۰۰}$ یک دوران کامل بدست آید و آنرا با $grad$ نشان می دهیم. اجزای گراد عبارتند از دسی گراد ($\frac{۱}{۱۰}$ گراد)، سانتیگراد ($\frac{۱}{۱۰۰}$ گراد) و میلیگراد ($\frac{۱}{۱۰۰۰}$ گراد) و می نویسیم $\angle AOB = ۲۳/۵۴۷۸grad$.

رادیان زاویه ای است که از دوران شعاع دایره بدور مرکز آن بدست می آید، بطوریکه اندازهٔ کمان حاصل مساوی شعاع دایره باشد. رادیان مستقل از شعاع بوده و به اندازهٔ آن بستگی ندارد.



شکل ۲.۶ رادیان کمانی از دایره به اندازه شعاع است.

۲.۱.۶ دایرهٔ مثلثاتی

دایرهٔ مثلثاتی دایره ای است که مرکزش منطبق بر مرکز مختصات بوده و دارای شعاع واحد و جهت مفروض می باشد. جهت مثبت روی دایره مثلثاتی در خلاف جهت گردش عقربه های ساعت فرض شده و جهت منفی در جهت چرخش عقربه های ساعت است. دایرهٔ مثلثاتی صفحهٔ مختصات را به چهار ربع تقسیم می کند، ربع اول I، ربع دوم II، ربع سوم III و ربع چهارم IV که در شکل۲.۶ دیده می شود.

۳.۱.۶ تقسیمات زاویه

زاویه ای که رأس آن بر مرکز دایره مثلثاتی واقع باشد از دایره کمانی جدا می کند که برابر آن زاویه است. عموماً دایرهٔ مثلثاتی سه گونه تقسیم می شود:

الف) دایره را به ۳۶۰ قسمت تقسیم و هر قسمت را یک درجه گوئیم و با D نشان می دهیم. لذا دایره ۳۶۰ درجه است.

ب) دایره را به ۴۰۰ قسمت تقسیم و هر قسمت را یک **گراد** گوئیم و آنرا با G نشان می دهیم. یعنی دایره ۴۰۰ گراد است.

ج) از روی دایره به اندازهٔ شعاع جدا می کنیم و هر قسمت را یک **رادیان** گوئیم و آنرا با R نشان می دهیم. از آنجا که محیط دایره مثلثاتی ۲π است پس محیط هر دایره ۲π رادیان است (چیزی حدود ٦/۳ رادیان).

رابطهٔ بین سه زاویه چنین است:

$$\frac{\text{مقدار زاویه}}{\text{یک دور کامل}} = \frac{D}{۳٦۰} = \frac{G}{۴۰۰} = \frac{R}{۲\pi}$$

یا بطور خلاصه:

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{G}{۲۰۰} = \frac{R}{\pi}$$

مثال ۱.٦ مقدار ۳۰ درجه چند گراد و چند رادیان است؟

حل.

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{G}{۲۰۰} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{۳۰}{۱۸۰} = \frac{G}{۲۰۰} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{۱}{٦} = \frac{G}{۲۰۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{٦} = \frac{G}{۲۰۰} & \Rightarrow \quad G = \frac{۱۰۰}{۳}\, grad, \\ \frac{۱}{٦} = \frac{R}{\pi} & \Rightarrow \quad R = \frac{\pi}{٦}\, rad. \end{cases}$$

هر دو نقطهٔ متمایز روی دایره، آنرا به دو کمان تقسیم می کنند که به آنها **کمانهای جهتدار مثلثاتی** گوئیم. هر کمان جهتدار مثلثاتی روی دایره یک **زاویهٔ اصلی** به شمار می رود. اگر جهت مخالف جهت عقربه‌های ساعت باشد آنرا مثبت و گرنه منفی می گیریم.

اگر از مبدأ دایرهٔ مثلثاتی شروع به گردش در جهت مثبت کنیم، با کسر تعداد دوران، مقدار زاویهٔ اصلی بدست می‌آید. برای مثال زاویهٔ ۱۰۰۰^o را می توان بصورت ۲۸۰+۳٦۰×۲ درجه نوشت. مقدار ۲۸۰ که از ۳٦۰ (یعنی یکدور کامل) کمتر است، زاویهٔ اصلی بشمار می‌رود. در حالت کلی پس از n دور گردش زاویه روی دایرهٔ مثلثاتی، بر حسب واحدهای مختلف می توان چنین نوشت:

$$n \times ۳٦۰ + \alpha^o \quad , \quad n \times ۴۰۰ + \beta\ grad \quad , \quad n \times ۲\pi + \gamma\ rad$$

و انتهای کمان $\alpha^o = \beta\ grad = \gamma\ rad$ بالاخره در یکی از ربع ها قرار خواهد گرفت. برای مثال $۱۹۰^o + ۳٦۰^o \times ٦ = ۲۳۵۰^o$ دارای زاویهٔ اصلی ۱۹۰^o بوده و پس از طی شش دور کامل، انتهای کمان در ربع سوم واقع می شود. همچنین برای زاویهٔ $۱۳۰ + ۴۰۰ \times ۴ = ۱۷۳۰ grad$ مقدار زاویهٔ اصلی $۱۳۰ grad$ بوده و با طی ۴ دور کامل، انتهای کمان در ربع دوم قرار می گیرد.

تمرین ۱.٦ .

۱) مقدار ۱۰۰ گراد چند درجه و چند رادیان است؟

۲) $\frac{\pi}{۴}$ رادیان چند گراد و چند درجه است؟

۳) زاویهٔ ۱۱۱۰ درجه را بر حسب رادیان و گراد بیان کنید و سپس آنرا روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

۴) مقدار ۹۵۰ گراد چند درجه و چند رادیان است؟ آنرا روی دایره مثلثاتی مشخص کنید.

۵) زاویهٔ $\frac{۱۰\pi}{۳}$ رادیان را بر حسب درجه و گراد بدست آورده و آنرا روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

٦) انتهای کمان های زیر در کدام ربع از دایره مثلثاتی هستند؟

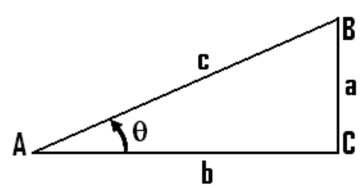
$$\alpha = ۱۴۰۰^o,\quad \beta = ۲۳٦۵D,\quad \gamma = ٦٦٦٦grad,\quad \delta = ۱۲۳۴۵\pi,\quad \varepsilon = ۲۵۱\pi + \frac{۲\pi}{۳}$$

۲.٦ نسبتهای مثلثاتی

در مثلثات شش نسبت قابل تعریف است که از بین آنها دو نسبت سینوس $\sin$ و کسینوس $\cos$ نسبتهای اصلی و نسبتهای تانژانت $\tan$، کتانژانت $\cot$، سکانت $\sec$ و کسکانت $\csc$ وابسته و بر اساس آنها تعریف می گردند. در ابتدا نسبتهای سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت توضیح داده می شوند و سپس روابط بین آنها را بیان خواهیم کرد.

۱.۲.٦ نسبتهای چهارگانه

مثلث قائم الزاویهٔ مفروضی را با اضلاع a, b, c و زاویهٔ $\angle BAC = \theta$ در نظر بگیرید. نسبتهای چهارگانه را بصورت زیر تعریف می کنیم:



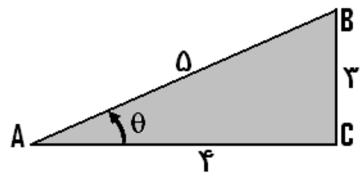
شکل ۳.٦ مثلث قائم الزاویه و نسبت های مثلثاتی

$\cos\theta = \frac{b}{c}$ ضلع مجاور به وتر $\qquad$ $\sin\theta = \frac{a}{c}$ ضلع مقابل به وتر

$\cot\theta = \frac{b}{a}$ ضلع مجاور به مقابل $\qquad$ $\tan\theta = \frac{a}{b}$ ضلع مقابل به مجاور

مثال ۲.۶ در مثلث زیر نسبتهای چهارگانه چنین هستند:

$$\sin\theta = \frac{۳}{۵} \quad , \quad \cos\theta = \frac{۴}{۵} \quad , \quad \tan\theta = \frac{۳}{۴} \quad , \quad \cot\theta = \frac{۴}{۳}$$



شکل ۴.۶ نسبت های مثلثاتی در مثلثی به اضلاع ۳ و ۴ و ۵

با استفاده از روشهائی ساده، مقادیر نسبتهای مثلثاتی را می توان بدست آورد که ما آنها را در جدول زیر ذکر می کنیم.

زاویه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞	۰	∞	۰
cot	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	∞	۰	∞

منظور از **عبارت مثلثاتی**، ترکیب نسبتهای مثلثاتی با چهار عمل اصلی بهمراه رادیکال و توان است. مانند عبارات جبری که از متغیرها تشکیل می شد عبارت مثلثاتی از نسبتهای مثلثاتی تشکیل می شود. توضیح اینکه بجای قراردادن توان روی نسبت مثلثاتی، مرسوم است که توان را بین نسبت مثلثاتی و زاویه قرار می دهند، برای مثال بجای $(\cos ۳۰)^۲$ می نویسند $\cos^۲ ۳۰$.

مثال ۳.۶ با استفاده از مقادیر جدول بالا، مقدار عبارات مثلثاتی $۲\sin ۴۵ + ۴[\cos ۳۰]^۲$ و $\tan ۳۰ \sin ۶۰ - [\sin ۳۰]^۲$ را حساب کنید.

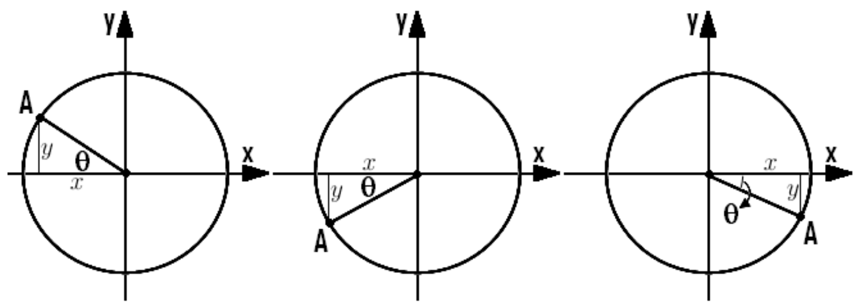
حل. جواب چنین است:

$$\begin{aligned} ۲\sin ۴۵ + ۴\cos^۲ ۳۰ &= ۲\frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۴(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ = \sqrt{۲} + ۴(\frac{۳}{۴}) = \sqrt{۲} + ۳ \\ \tan ۳۰ \sin ۶۰ - \sin^۲ ۳۰ &= \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۳}{۶} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴} \end{aligned}$$

اگر انتهای کمان در ربع اول باشد از جدول فوق مقادیر را محاسبه نموده و دقت کنید که علامت همهٔ نسبتها مثبت می باشد. برای سایر ربع ها، نسبتهای مثلثاتی دارای علامات مختلفی اند که در جدول زیر خلاصه شده‌اند:

ربع	I	II	III	IV
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

در این جدول، علامت نسبتهای مثلثاتی در سایر ربع ها بدست آمده که توسط اشکال زیر حاصل شده اند:



شکل ٥.٦ نسبت های مثلثاتی در سایر ربع ها

ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$x<\circ\ ,\ y>\circ$	$x<\circ\ ,\ y<\circ$	$x>\circ\ ,\ y<\circ$
$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$	$\sin(۲\pi-\theta)=-\sin\theta$
$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$	$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$	$\cos(۲\pi-\theta)=\cos\theta$
$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$	$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$	$\tan(۲\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$	$\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$	$\cot(۲\pi-\theta)=-\cot\theta$

مثال ٤.٦ مقدار عبارت $\sin ۲۴\circ \cos ۳۳\circ$ را بیابید.

حل.

$$\begin{aligned}
\sin ۲۴\circ \cos ۳۳\circ &= \sin(۱۸\circ+٦\circ)\cos(۳٦\circ-۳\circ)\\
&= -\sin ٦\circ \cos ۳\circ\\
&= -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\
&= -\frac{۳}{۴}
\end{aligned}$$

مثال ۵.۶ مقدار عبارت مقابل را حساب کنید. $\dfrac{\sin ۲۱۰}{\cos ۳۰۰ + \tan ۲۲۵}$

حل.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin ۲۱۰}{\cos ۳۰۰ + \tan ۲۲۵} &= \frac{\sin(۱۸۰ + ۳۰)}{\cos(۳۶۰ - ۶۰) + \tan(۱۸۰ + ۴۵)} \\
&= \frac{-\sin ۳۰}{+\cos ۶۰ + \tan ۴۵} \\
&= \frac{-\frac{۱}{۲}}{+\frac{۱}{۲} + ۱} \\
&= -\frac{۱}{۳}
\end{aligned}$$

برای زوایای بزرگتر از یکدور کامل، ابتدا زاویه اصلی را بدست آورده و سپس مطابق ذیل رفتار می کنیم:

$$\sin(n \times ۳۶۰ + \theta) = \sin(۲\pi n + \theta) = \sin\theta$$

$$\cos(n \times ۳۶۰ + \theta) = \cos(۲\pi n + \theta) = \cos\theta$$

$$\tan(n \times ۳۶۰ + \theta) = \tan(۲\pi n + \theta) = \tan\theta$$

$$\cot(n \times ۳۶۰ + \theta) = \cot(۲\pi n + \theta) = \cot\theta$$

که n تعداد دورهای کامل است. همچنین برای زوایای منفی که در ربع چهارم واقع می شوند نسبت ها چنیننند:

$$\begin{aligned}
\sin(-\theta) &= -\sin\theta \\
\cos(-\theta) &= \cos\theta \\
\tan(-\theta) &= -\tan\theta \\
\cot(-\theta) &= -\cot\theta
\end{aligned}$$

مثال ۶.۶ مقدار عبارت $\tan ۱۳۲۰ + ۲\cos ۱۵۹۰$ را بیابید.

حل.

$$\begin{aligned}
\tan(۳ \times ۳۶۰ + ۲۴۰) &+ ۲\cos(۴ \times ۳۶۰ + ۱۵۰) \\
&= \tan(۱۸۰ + ۶۰) + ۲\cos(۱۸۰ - ۳۰) \\
&= \tan ۶۰ - ۲\cos ۳۰ \\
&= \sqrt{۳} - ۲\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\
&= \sqrt{۳} - \sqrt{۳} \\
&= ۰
\end{aligned}$$

مثال ۷.۶ حاصل مقدار $\sin(\theta-۵\pi)$ چیست؟

حل.

$$
\begin{aligned}
\sin(\theta-۵\pi) &= -\sin(۵\pi-\theta)\\
&= -\sin(۴\pi+\pi-\theta)\\
&= -\sin(\pi-\theta)\\
&= -\sin\theta
\end{aligned}
$$

تمرین ۲.۶ حاصل هر کدام از عبارات مثلثاتی زیر را بیابید. زوایای ذکر شده برحسب درجه‌اند.

$$
\begin{array}{llcll}
(a) & \sin ۴۵\cos ۳۰+\sin ۳۰\cos ۴۵ & , & (b) & ۴\sin ۶۰\cos ۳۰+(۶\tan ۳۰)^{۲}\\
(c) & ۴\sin ۲۱۰\tan ۱۵۰+\cot ۲۱۰ & , & (d) & (۱+\tan^{۲} ۲۴۰)\cos^{۲} ۱۵۰\\
(e) & \dfrac{۳\sin ۱۵۰+\cos ۲۴۰}{۲\cot ۱۳۵-\tan ۳۱۵} & , & (f) & \dfrac{\cos ۲۴۰+۲\sin ۳۳۰}{\sin ۱۲۰+\cos ۳۳۰}\\
(g) & ۸\sin ۲۷۴۵-۲\cos ۴۴۵۵ & , & (h) & ۲\tan ۲۲۶۵-\cot ۳۸۸۵-\cos ۲۵۹۵\\
(i) & \dfrac{۸\sin ۲۲۹۵+۲\cos ۴۶۳۵}{۶\sin ۳۲۷۰-۴\tan ۱۳۰۵} & , & (j) & \dfrac{\tan(۱۸۳۰)-\cos(-۲۴۰۰)}{\sin(-۱۲۹۰)+\tan(-۱۴۱۰)}
\end{array}
$$

۲.۲.۶ روابط مثلثاتی

از آنجا که نسبتهای مثلثاتی طبق روابطی بین اضلاع a و b و c از یک مثلث قائم الزاویه تعریف شد (بخش۲.۶)، این نسبتها خود با هم روابطی ریاضی برقرار می کنند. مثلاً دیدیم که $\tan\theta=\frac{a}{b}$ و $\cot\theta=\frac{b}{a}$ و بنابراین $\tan\theta.\cot\theta=\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=۱$ خواهد بود. چنین روابطی را می توان برای هر زاویهٔ **دلخواه** بین مقادیر نسبتهای چهارگانه بدست آورد. روابط اصلی بین نسبتهای مثلثاتی روی زاویهٔ x بصورت زیر است:

$$
\begin{array}{lclcl}
\sin^{۲} x+\cos^{۲} x=۱ & , & \sin^{۲} x=۱-\cos^{۲} x & , & \cos^{۲} x=۱-\sin^{۲} x\\
\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x} & , & \tan x=\dfrac{۱}{\cot x} & , & ۱+\tan^{۲} x=\dfrac{۱}{\cos^{۲} x}\\
\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x} & , & \cot x=\dfrac{۱}{\tan x} & , & ۱+\cot^{۲} x=\dfrac{۱}{\sin^{۲} x}\\
\tan x.\cot x=۱ & , & \sec x=\dfrac{۱}{\cos x} & , & \csc x=\dfrac{۱}{\sin x}\\
\sin x=\pm\sqrt{۱-\cos^{۲} x} & , & \sin x=\pm\dfrac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^{۲} x}} & , & \sin x=\pm\dfrac{۱}{\sqrt{۱+\cot^{۲} x}}\\
\cos x=\pm\sqrt{۱-\sin^{۲} x} & , & \cos x=\pm\dfrac{۱}{\sqrt{۱+\tan^{۲} x}} & , & \cos x=\pm\dfrac{\cot x}{\sqrt{۱+\cot^{۲} x}}
\end{array}
$$

هرگاه یک عبارت مثلثاتی بازای جمیع مقادیری که بجای متغیر آن گذاشته می شود، برقرار شود آن عبارت را **اتحاد مثلثاتی** نامیم. عبارات مثلثاتی بالا همگی اتحادهای مثلثاتی اند که ارتباط بین نسبت ها را بیان می کنند. با استفاده از این ارتباط می توان با داشتن یکی از نسبتها، سایر نسبتها را یافت و در این موضوع، تنها دانستن انتهای کمان کافی است.

مثال ۸.٦ اگر $\sin x = \frac{-۴}{۵}$ و انتهای کمان در ربع سوم باشد مطلوبست سایر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ x.

حل. در ربع سوم $\cos$ منفی و $\tan$ و $\cot$ مثبت خواهند بود. با استفاده از روابط بین نسبتها می نویسیم

$$\cos x = -\sqrt{۱ - \sin^۲ x} = -\sqrt{۱ - (\frac{-۴}{۵})^۲} = -\sqrt{۱ - \frac{۱٦}{۲۵}} = -\frac{۳}{۵}$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{-۴}{۵}}{\frac{-۳}{۵}} = \frac{۴}{۳}$$
$$\cot x = \frac{۱}{\tan x} = \frac{۱}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۳}{۴}$$

مثال ۹.٦ عبارت $\sin x\ (\tan x + \cot x)$ را ساده کنید.

حل.

$$\begin{aligned}
\sin x(\tan x + \cot x) &= \sin x\Big(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\Big)\\
&= \sin x\Big(\frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\cos x \sin x}\Big)\\
&= \sin x\Big(\frac{۱}{\cos x \sin x}\Big)\\
&= \frac{۱}{\cos x}
\end{aligned}$$

مثال ۱۰.٦ عبارت $\sin^۲ x\ \cos^۲ x(۲ + \tan^۲ x + \cot^۲ x)$ را ساده کنید.

$$\begin{aligned}
\sin^۲ x \cos^۲ x(۲ + \tan^۲ x + \cot^۲ x) &= \sin^۲ x\ \cos^۲ x(۱ + \tan^۲ x + ۱ + \cot^۲ x)\\
&= \sin^۲ x\ \cos^۲ x\Big(\frac{۱}{\cos^۲ x} + \frac{۱}{\sin^۲ x}\Big)\\
&= \sin^۲ x\ \cos^۲ x\Big(\frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\cos^۲ x\ \sin^۲ x}\Big)\\
&= \sin^۲ x\ \cos^۲ x\Big(\frac{۱}{\cos^۲ x\ \sin^۲ x}\Big)\\
&= ۱
\end{aligned}$$

تمرین ۳.۶ .

۱) اگر $\cos x = -\frac{۱}{۴}$ و انتهای کمان در ربع دوم باشد، مطلوبست سایر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ x.

۲) اگر $\tan x = -\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و انتهای کمان در ربع چهارم باشد، سایر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ x را بیابید.

۳) عبارات مثلثاتی زیر را ساده کنید.

$$(a)\quad (\cos\theta.\tan\theta)^{۲}+(\sin\theta.\cot\theta)^{۲} \quad , \quad (b)\quad \frac{(۱+\tan x)(۱-\cot x)}{(۱+\cot x)(۱-\tan x)}$$

$$(c)\quad \frac{\tan x}{\sin x\cos^{۲}x(۱+\tan^{۲}x)} \quad , \quad (d)\quad \left(\frac{\sin\theta}{\tan\theta}\right)^{۲}+\left(\frac{\cos\theta}{\cot\theta}\right)^{۲}$$

$$(e)\quad \frac{\sin^{۲}x-\cos^{۲}x-۱}{\cot^{۲}x} \quad , \quad (f)\quad \frac{\sin t}{۱+\cos t}+\frac{۱+\cos t}{\sin t}$$

۳.۲.۶ نسبتهای مثلثاتی مجموع دو زاویه

مقادیر نسبتهای مجموع و تفاضل دو کمان دلخواه a و b چنین هستند:

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \quad , \quad \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \quad , \quad \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{۱-\tan a\ \tan b} \quad , \quad \tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{۱+\tan a\ \tan b}$$

$$\cot(a+b)=\frac{\cot a\ \cot b-۱}{\cot a+\cot b} \quad , \quad \cot(a-b)=\frac{\cot a\ \cot b+۱}{\cot a-\cot b}$$

مثال ۱۱.۶ مقدار $\sin ۱۵^{o}$ را حساب کنید.

حل. با استفاده از سینوس تفاضل دو کمان می نویسیم:

$$\begin{aligned}\sin ۱۵ &= \sin(۴۵-۳۰)\\ &= \sin ۴۵\ \cos ۳۰-\cos ۴۵\ \sin ۳۰\\ &= \frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}\\ &= \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}\end{aligned}$$

مثال ۱۲.٦ مقدار $\tan 105^o$ را حساب کنید.

حل. با استفاده از تانژانت مجموع زوایا داریم:

$$\begin{aligned}
\tan 105 &= \tan(45+60)\\
&= \frac{\tan 45 + \tan 60}{1-\tan 45 \tan 60}\\
&= \frac{1+\sqrt{3}}{1-1\times\sqrt{3}}\\
&= -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})^2\\
&= -2-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

از بکارگیری فرمولهای قبل، می توان حاصلجمع، تفاضل و حاصلضرب نسبتهای مثلثاتی را برای زوایای دلخواه p و q به شکل زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned}
&\sin p \cos q = \frac{1}{2}\big[\sin(p+q)+\sin(p-q)\big]\\
&\sin p \sin q = \frac{-1}{2}\big[\cos(p+q)-\cos(p-q)\big]\\
&\cos p \cos q = \frac{1}{2}\big[\cos(p+q)+\cos(p-q)\big]\\
&\cos p + \cos q = 2\cos\big(\frac{p+q}{2}\big)\cos\big(\frac{p-q}{2}\big)\\
&\cos p - \cos q = -2\sin\big(\frac{p+q}{2}\big)\sin\big(\frac{p-q}{2}\big)\\
&\sin p + \sin q = 2\sin\big(\frac{p+q}{2}\big)\cos\big(\frac{p-q}{2}\big)\\
&\sin p - \sin q = 2\cos\big(\frac{p+q}{2}\big)\sin\big(\frac{p-q}{2}\big)\\
&\tan p \pm \tan q = \frac{\sin(p\pm q)}{\cos p\cos q}\\
&\cot p \pm \cot q = \frac{\sin(q\pm p)}{\sin p\sin q}
\end{aligned}$$

مثال ۱۳.٦ درستی عبارت $\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3})+\cos(\alpha+\frac{4\pi}{3})=-\cos\alpha$ را بررسی کنید.

حل. عبارت طرف چپ را با استفاده از فرمول حاصلجمع دو کسینوس در فوق می نویسیم:

$$\begin{aligned}
\text{طرف چپ} &= 2\cos\Big(\frac{\alpha+\frac{2\pi}{3}+\alpha+\frac{4\pi}{3}}{2}\Big)\cos\Big(\frac{\alpha+\frac{2\pi}{3}-\alpha-\frac{4\pi}{3}}{2}\Big)\\
&= 2\cos(\alpha+\pi)\cos(-\frac{\pi}{3})\\
&= 2\times-\cos\alpha\times\frac{1}{2}\\
&= -\cos\alpha
\end{aligned}$$

تمرین ۴.۶ .

۱) مقادیر $\tan 75^o$، $\sin 75^o$، $\cot 75^o$ و $\sin 105^o$ را حساب کنید.

۲) درستی عبارات مثلثاتی زیر را ثابت نمائید.

$$(a)\quad \frac{\cos 110^o+\cos 10^o}{\cos 15^o}=1 \quad , \quad (b)\quad \sin(\alpha+\frac{\pi}{3})+\sin(\alpha+\frac{2\pi}{3})=\sqrt{3}\cos\alpha$$

$$(c)\quad \sin 75^o+\sin 15^o=\frac{1}{2}\sqrt{6} \quad , \quad (d)\quad \tan 75^o-\tan 15^o=6-2\sqrt{6}$$

۴.۲.۶ نسبتهای دو برابر کمان

با استفاده از فرمول مجموع دو کمان صفحهٔ قبل و قرار دادن $p=q=x$ براحتی می توان فرمول هائی برای نسبتهای دو برابر کمان یافت. این فرمول ها چنین اند:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x \quad , \quad \cos 2x = 2\cos^2 x-1 \quad , \quad \cos 2x = 1-2\sin^2 x$$

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\cot 2x=\frac{\cot^2 x-1}{2\cot x}$$

و روابط مفید زیر را نیز نتیجه می گیریم:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2} \quad , \quad \tan^2 x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

همچنین سه فرمول زیر، که روابطی بر حسب تانژانت نصف کمان است را بدست می آوریم:

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \quad , \quad \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \quad , \quad \tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

مثال ۱۴.۶ عبارت $\frac{\cos 2a-1}{\sin 2a}$ را ساده کنید.

حل.

$$\begin{aligned}\frac{\cos 2a-1}{\sin 2a} &= \frac{1-2\sin^2 a-1}{\sin 2a}\\ &= \frac{-2\sin^2 a}{2\sin a\cos a}\\ &= \frac{-\sin a}{\cos a}\\ &= -\tan a\end{aligned}$$

مثال ۱۵.٦ عبارت $\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}$ را ساده کنید.

حل.

$$\begin{aligned}\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x} &= \frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\\ &= \frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}\\ &= \sin x+\cos x\end{aligned}$$

تمرین ۵.٦ عبارات مثلثاتی زیر را ساده نمائید.

$$(a)\quad \frac{\tan 2\theta\cos 2\theta}{2\sin\theta}\quad,\ (b)\quad \frac{\sin 2\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta}\quad,\ (c)\quad \frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\sin 2\alpha}$$

$$(d)\quad \sin 75^o\cos 15^o\quad,\ (e)\quad \frac{\csc 4x+\cot 4x}{\cot x-\tan x}\quad,\ (f)\quad \frac{\cot 3\beta(\tan\beta-\tan 3\beta)}{\cot\beta-\cot 3\beta}$$

۳.٦ معادلات مثلثاتی

هرگاه یک عبارت مثلثاتی بازای جمیع مقادیری که بجای متغیر آن گذاشته می شود، برقرار شود آن عبارت را **اتحاد مثلثاتی** نامیم. این اتحادها شبیه اتحادهای جبری اند برای مثال

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

اکثر فرمولهای مثلثاتی بخشهای قبل اتحاد مثلثاتی بودند. اما گاهی عبارات مثلثاتی برای برخی از مقادیر درستند. تساوی دو عبارت را که شامل مقادیر نسبتهای مثلثاتی یک زاویه بوده و برابری دو طرف تساوی در ازای برخی مقادیر این زاویه برقرار شود، **معادلهٔ مثلثاتی** نامیده می شود. عبارت $\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}=\sin x+1$ یک معادلهٔ مثلثاتی است. می خواهیم جواب این معادله را بدست آوریم یعنی مجموعه مقادیری که مغادله برای آنها درست خواهد بود. با استفاده از مثال۱۵.٦ طرف چپ این معادله ساده شده و داریم $\sin x+\cos x=\sin x+1$ و پس از ساده کردن $\cos x=1$، یعنی $x=2k\pi$. این جواب بدین ترتیب بدست آمد که چون $\cos x=\cos 0$ لذا $x=2k\pi\pm 0$ یا $x=2k\pi$ و در نتیجه برای k–ی صحیح جوابها عبارتند از

$$\cdots,-6\pi,-4\pi,-2\pi,0,2\pi,4\pi,6\pi,\cdots$$

و بهتر است صورت ریاضی مجموعه جواب را بنویسیم:

$$\text{مجموعه جواب}=\{2k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$$

هنگامی که نسبت دو کمان x و α برابر می‌شوند می توان رابطهٔ بین این کمان ها را بصورت زیر نوشت $(k \in \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned}
\sin x = \sin\alpha &\implies x = ۲k\pi + \alpha \quad , \quad x = ۲k\pi + \pi - \alpha\\
\cos x = \cos\alpha &\implies x = ۲k\pi \pm \alpha\\
\tan x = \tan\alpha &\implies x = k\pi + \alpha\\
\cot x = \cot\alpha &\implies x = k\pi + \alpha
\end{aligned}$$

مثال ۱٦.٦ معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x = \sin x$ را حل کنید.

حل. با استفاده از فرمول سینوس در فوق باید داشته باشیم

$$\begin{aligned}
۲x &= ۲k\pi + x\\
۲x &= ۲k\pi + \pi - x
\end{aligned}$$

که پس از ساده کردن جوابها عبارت اند از:

$$x = ۲k\pi,\ x = \frac{۲k\pi + \pi}{۳} \qquad , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

مثال ۱۷.٦ مطلوبست حل معادلهٔ

$$\tan(۱ + \frac{x}{۲})\tan(۱ - \frac{x}{۳}) = ۱$$

حل. ابتدا معادله را بشکل زیر تغییر می دهیم:

$$\begin{aligned}
\tan(۱ + \frac{x}{۲}) &= \frac{۱}{\tan(۱ - \frac{x}{۳})}\\
&= \cot(۱ - \frac{x}{۳})\\
&= \tan(\frac{\pi}{۲} - ۱ + \frac{x}{۳})
\end{aligned}$$

و با برابری دو کمان داریم

$$۱ + \frac{x}{۲} = k\pi + \frac{\pi}{۲} - ۱ + \frac{x}{۳}$$

که پس از ساده کردن $x = ٦k\pi + ۳\pi - ۱۲_{rad}$ جواب معادلهٔ مثلثاتی است.

تمرین ٦.٦ معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \cos ۴x = \cos x && , \quad (b) \quad \sin ۳x = \cos(\frac{\pi}{۲} - x)\\
&(c) \quad \tan(x + ۱)\tan(x + ۲) = -۱ && , \quad (d) \quad \tan^۳ x - ۳\sqrt{۳} = ۰\\
&(e) \quad ۲\cos^۲ x = \sin x - ۱ && , \quad (f) \quad ۳\cot x = \tan x
\end{aligned}$$

۴.۶ معادلهٔ مثلثاتی خط

معادلهٔ خطی که از مبداء می گذرد و نقطهٔ $A(a,b)$ از آن معلوم است عبارتست از

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{y-0}{x-0}=\frac{b-0}{a-0}\Rightarrow y=\frac{b}{a}x$$

از طرفی $\tan\theta=\frac{b}{a}$ و لذا معادلهٔ خطی که از مبداء می گذرد بصورت $y=\tan\theta\ x$ خواهد بود که θ زاویهٔ خط با سمت مثبت محور طولهاست.

مثال ۱۸.۶ معادلهٔ خطی را بنویسید که از مبداء مختصات گذشته و با محور x−ها زاویهٔ ۳۰ درجه می سازد.

حل. طبق فرمول $y=\tan(30^o)x$ پس $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ معادلهٔ خط مذکور خواهد بود.

مطلب ۱.۶ زاویهٔ بین دو خط با شیب های m_1 و m_2 عبارتست از $\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$

مثال ۱۹.۶ زاویهٔ بین دو خط $y=2x-4$ و $x-3y+3=0$ چیست؟

حل. برای این دو خط با شیب های $m_1=2$ و $m_2=\frac{1}{3}$ ازفرمول زاویهٔ بین دو خط داریم

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{2-(\frac{1}{3})}{1+2(\frac{1}{3})}\right|=1\qquad\Rightarrow\qquad\theta=\frac{\pi}{4}$$

تمرین ۷.۶ تکمیلی.

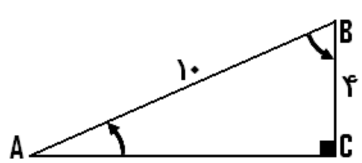
۱) مقدار 450^o را بر حسب رادیان و گراد بیان کرده و آنرا روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

۲) انتهای کمان های 3090^o و $\frac{107\pi}{4}$ در کدام ربع از دایره مثلثاتی هستند؟

۳) اگر $A=1650grad$، $B=1215^o$، $C=-950grad$ و $D=\frac{95\pi}{4}$ باشند، انتهای کمانهای A، B، C و D را روی دایرهٔ مثلثاتی بیابید و ثابت کنید $ABCD$ یک مربع است، سپس مساحت آنرا بدست آورید.

۴) در مثلث $\triangle ABC$ زیر مقدار عبارات خواسته شده را بیابید:

$$\sin A.\cot B-\tan A.\cos B \qquad\qquad \csc^2 B(\sin^2 C-\tan^2 A)$$



۵) مجموع دو زاویه $\frac{\pi}{2}$ رادیان است در صورتی که اولی را بر حسب درجه x و دومی را بر حسب گراد y بنامیم داریم $x = 2y$. مقدار دو زاویه را بر حسب رادیان بدست آورید.

۶) حاصل عبارات زیر را بدست آورید (زوایا برحسب درجه اند):

$$(a)\quad \frac{4\sin 150 - 2\cos 120}{3\tan^2 30 + \cot^2 210} \quad , \quad (b)\quad \frac{6\tan^2 210 - 2\sin 330}{6\cot^2 210 - 4\cos 300}$$

$$(c)\quad \frac{2\tan 300 - \cot 120}{\cos 180 - 4\sin^2 30} \quad , \quad (d)\quad \frac{\tan 225\cos 270 - \cot 225}{1 - \tan^2 300}$$

$$(e)\quad \frac{1 - \tan^2 210}{1 + \tan^2 210} \quad , \quad (f)\quad \frac{\sin 1860 + \cos 2550}{\tan 1380 - 4\sqrt{3}\cot 1125}$$

۷) مقادیر $\sin 3x$ و $\cos 3x$ را بر حسب $\sin x$ و $\cos x$ حساب کنید.

۸) در ساعت ۴ و ۴۰ دقیقه زاویهٔ عقربه های ساعت چقدر است؟

۹) در ساعت ۵ و ۱۰ دقیقه زاویهٔ بین عقربه های ساعت چقدر است؟

۱۰) اگر $\tan z = \frac{a-1}{b}$ و $\cot z = \frac{b-1}{a-2}$ باشد مقدار زاویهٔ z چقدر است.

۱۱) حدود a را چنان تعیین کنید که $\sin x = 3 - 2a$ باشد.

۱۲) اگر $30^o \leq \alpha \leq 60^o$ باشد و $\cos\alpha = 2 - 3m$، m در چه فاصله ای تغییر می کند؟

۱۳) اگر $\cos\alpha = \frac{2m-1}{m+1}$ باشد و انتهای کمان α در ربع دوم باشد، حدود m را تعیین کنید.

۱۴) اگر $110grad \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}$ باشد و $\sin\alpha = \frac{3m+1}{m-2}$، m در چه فاصله‌ای تغییر می‌کند؟

۱۵) اگر $\sin 36^o = 0/5878$ و $\sin 37^o = 0/6018$ باشد مقدار $\sin(36^o, 25')$ را حساب کنید.

۱۶) اگر $\tan x = \frac{m+1}{m}$ و $\cos x = \frac{m}{m+2}$ مقدار m را حساب کرده و مشخص کنید که انتهای کمان x در کدام ناحیهٔ مثلثاتی است.

۱۷) در معادلهٔ مثلثاتی $m\sin^2 x + (m-1)\sin x - 1 = 0$

(اولاً) تعیین کنید بازای چه مقادیری از m معادله جواب دارد.

(ثانیاً) بازای $m = \sqrt{2}$ جوابها را بیابید.

۱۸) معادلهٔ $x^2 - (\tan\alpha + 3\cot\alpha)x + 3 = 0$ را حل کنید.

۱۹) اگر در مثلث $\triangle ABC$ داشته باشیم $\angle A = 120^\circ$ ثابت کنید $\tan 3B + \tan 3C = 0$.

۲۰) درستی روابط مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

$$(a)\quad \frac{2\sin\alpha\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cos 2\alpha - 1$$
$$(b)\quad \sin^3 a\sin 3a + \cos^3 a\cos 3a = \cos^3 2a$$
$$(c)\quad \sin 10\sin 30\sin 50\sin 70\sin 90 = \frac{1}{16}$$
$$(d)\quad \tan x\tan(60+x)\tan(60-x) = \tan 3x$$
$$(e)\quad \cos\alpha + \cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right) = 0$$
$$(f)\quad \tan\alpha\tan 2\alpha\tan 3\alpha = \tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan\alpha$$
$$(g)\quad \sin^3 a\sin 3a + \cos^3 a\cos 3a = \cos^3 2a$$
$$(h)\quad 4[\cos^3 a\sin 3a + \sin^3 a\cos 3a] = 3\sin 4a$$
$$(i)\quad \tan\alpha + \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right) = 3\tan 3a$$
$$(j)\quad \tan 20 - \tan 40 + \tan 80 = 3\sqrt{3}$$
$$(k)\quad \sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \sin^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$$
$$(l)\quad \cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$$

۲۱) عبارات مثلثاتی زیر را ساده کنید.

$$(a)\quad \frac{\sin 2\alpha\cos\alpha}{1+\cos 2\alpha} \quad , \quad (b)\quad \cos 2x(1+\tan x.\tan 2x)$$
$$(c)\quad \sin 4x + \cos 4x.\cot 2x \quad , \quad (d)\quad \tan x - \sin x(1+\tan x.\tan\frac{x}{2})$$
$$(e)\quad \frac{\csc 4x + \cot 4x}{\cot x - \tan x} \quad , \quad (f)\quad \cot 20 - \cot 40 + \cot 80$$
$$(g)\quad \cos y\Big(\frac{2}{\cos y} + \tan y\Big)\Big(\frac{1}{\cos y} - 2\tan y\Big) + 3\tan y$$

۲۲) معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$(a)\quad \sin x + \cos x = 5 \quad , \quad (b)\quad 3\cos^3 x - \cos x = 0$$
$$(c)\quad \tan(x+30^o)\tan(x+60^o) = 1 \quad , \quad (d)\quad \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin x - \sin 2x} = \frac{1}{2}$$
$$(e)\quad 3(1-\sin x) = 1 + \cos 2x \quad , \quad (f)\quad \sin x + \cos x = 1 + 2\sin x\cos x$$
$$(g)\quad 2\sin 2x = 3(\sin x + \cos x) \quad , \quad (h)\quad \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$$
$$(i)\quad \tan(\pi\tan x) = \cot(\pi\cot x) \quad , \quad (j)\quad \sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$$

۲۳) معادلهٔ خطی را بنویسید که از مبداء مختصات گذشته و با محور x−ها زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ می سازد.

۲۴) معادلهٔ خطی که از مبداء مختصات عبور کرده و با محور x−ها زاویهٔ ۷۵ درجه می سازد را بیابید.

۲۵) اگر $٦\cos x + ۵ = ۰$ و انتهای کمان در ربع دوم باشد، مطلوبست سایر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ x.

۲٦) اگر $\sqrt{۳}\cot z = -۱$ و انتهای کمان در ربع چهارم باشد، سایر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ z را بیابید.

۲۷) اگر $\sin A = \frac{۴}{۵}$ و انتهای کمان A در ربع اول باشد ثابت کنید $\tan A + \frac{۱}{\cos A} = ۳$.

۲۸) کدام بزرگترند؟ $\sin ۱$ یا $\sin ۱^o$.

۲۹) برای هر زاویهٔ دلخواه x ثابت کنید $\log(\sin x) \leq ۰$.

۳۰) با استفاده از تساوی $\sin ۳٦^o = \cos ۵۴^o$ مقدار $\sin ۱۸^o$ را بیابید.

۳۱) دستگاه های مثلثاتی زیر را حل نمائید.

$$(a)\begin{cases} \sin^۲ x + \sin^۲ y = \frac{۳}{۴} \\ x + y = \frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases}, \quad (b)\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{۳}{۴} \\ \tan x \tan y = ۳ \end{cases}, \quad (c)\begin{cases} \sin x = \sqrt{۲}\sin y \\ \tan x = \sqrt{۳}\tan y \end{cases}$$

۳۲) اگر A و B و C سه زاویهٔ مثلثی باشند ثابت کنید:

$$\cos^۲ A + \cos^۲ B + \cos^۲ C \geq \frac{۳}{۴}$$

$$\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲} \leq \frac{۱}{۸}$$

۳۳) اگر $\cos\theta = \frac{p}{q}$ مقدار کسر $\frac{p\cos\theta - q\sin\theta}{p\cos\theta + q\sin\theta}$ را حساب کنید.

۳۴) ثابت کنید $\cos(\frac{\pi}{۵}) - \cos(\frac{۲\pi}{۵}) = \frac{۱}{۲}$

۳۵) رئوس یک مثلث عبارتند $A\Big|_{۱}^{۲}$، $B\Big|_{-۱}^{-۲}$ و $C\Big|_{۳}^{-۱}$. مطلوبست تعیین زوایای مثلث.

فصل ۷

خواص توابع

در بین تمام توابع، خواص مشابهی دیده می شود و لذا طبقه بندی آنها با بررسی خواصشان، همواره به شناخت و تعامل بین آنها کمک کرده و علاوه بر این، نمودار هندسی شان نیز برخی از این خاصیت ها را آشکار می سازد. در این فصل خواص عمومی توابع منجمله توابع مثلثاتی را بیان نموده و ویژگیهای مهم آنها را بررسی خواهیم نمود.

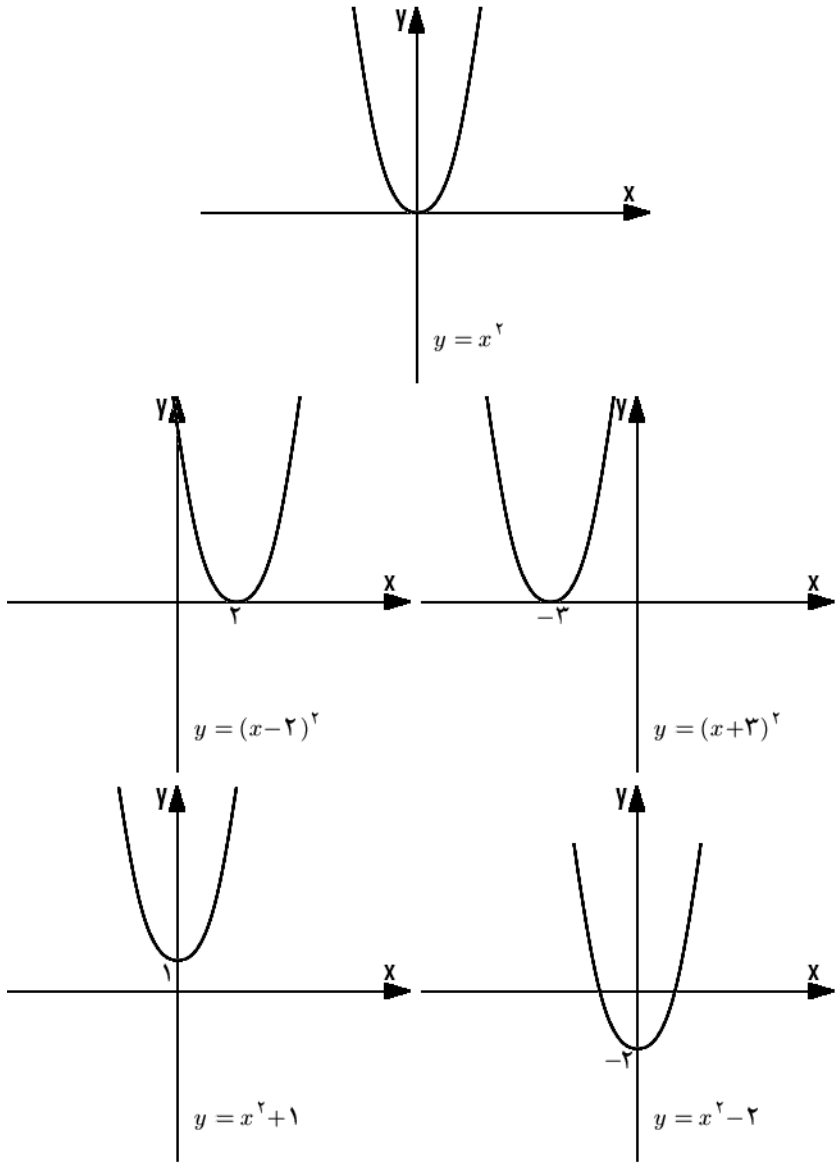
۱.۷ نمودارها و انتقالات

نمودار یک تابع $y = f(x)$ مجموعه نقاطی از صفحه است که توسط زوج مرتبهای $(x, f(x))$ مشخص می شوند. بعبارتی نمودار تابع شکلی هندسی است که از رسم همهٔ نقاط $(x, f(x))$ در صفحه پدید می آید. از خصوصیات نمودار یک تابع آنست که هر خط قائم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می کند. در غیر توابع، این شرط برقرار نیست و خط قائم ممکن است یک شکل یا نمودار را در چند نقطه قطع نماید.

ابتدائی ترین روش رسم نمودار **روش نقطه یابی** است که کارائی بالائی دارد. اما رسم نمودار با نقطه یابی ممکن است دارای اشتباهات زیادی شود، بنابراین با در نظر گرفتن ویژگیهای رفتاری و خصلتهای تابع می توان آنرا بهتر و دقیقتر رسم نمود. آگاهی از خصوصیات تابع نظیر دامنه، برد، تناوب، زوج و فرد بودن تابع، تقارن و دیگر ویژگی های آن کمک شایانی به شناخت نمودار تابع و رفتار آن دارد.

با فرض تابعی مانند $y = f(x)$ و آگاهی از نمودار آن در صفحهٔ مختصات، می توان انتقال

آنرا بر حسب تغییرات x و y چنین بیان نمود:



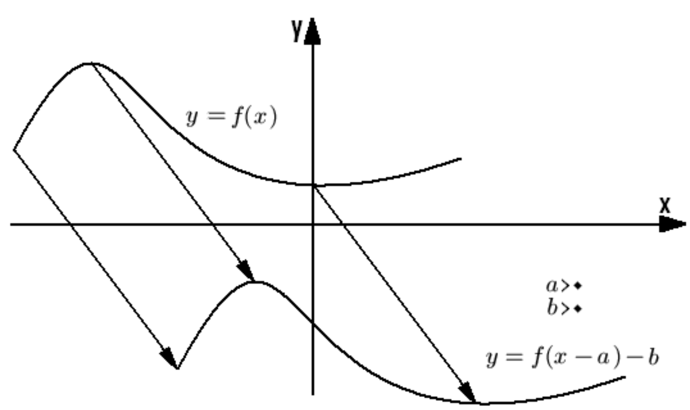
شکل ۱.۷ انتقال در نمودار سهمی $y = x^۲$

- نمودار تابع $y = f(x+a)$ انتقال نمودار f به اندازهٔ a است بموازات محور عرضها، اگر $a > ۰$ بسمت چپ و اگر $a < ۰$ بسمت راست.

- نمودار تابع $y = f(x) + b$ انتقال نمودار f به اندازهٔ b است بموازات محور طولها، اگر $b > ۰$ بسمت بالا و اگر $b < ۰$ بسمت پائین.
- نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینهٔ نمودار f نسبت به محور عرضهاست.
- نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینهٔ نمودار f نسبت به محور طولهاست.
- برای نمودار تابع $y = |f(x)|$ کافیست آنچه از نمودار f در قسمت پائین محور x−ها قرار می گیرد، قرینه شده و بطرف بالای محور منتقل شود.

در شکل۱.۷ نمودار $y = x^۲$ را در نظر گرفته و نمودار $y = (x-۲)^۲$ انتقال بموازات محور عرضها و به اندازهٔ ۲ بطرف راست است. نمودار $y = (x+۳)^۲$ تغییر بموازات محور عرضها، به اندازه ۳ بطرف چپ می باشد. نمودار $y = x^۲ + ۱$ انتقال نمودار به اندازهٔ ۱+ است که به سمت بالا حرکت کرده و $y = x^۲ - ۲$ تغییر نمودار به اندازهٔ ۲− در جهت پائین است.

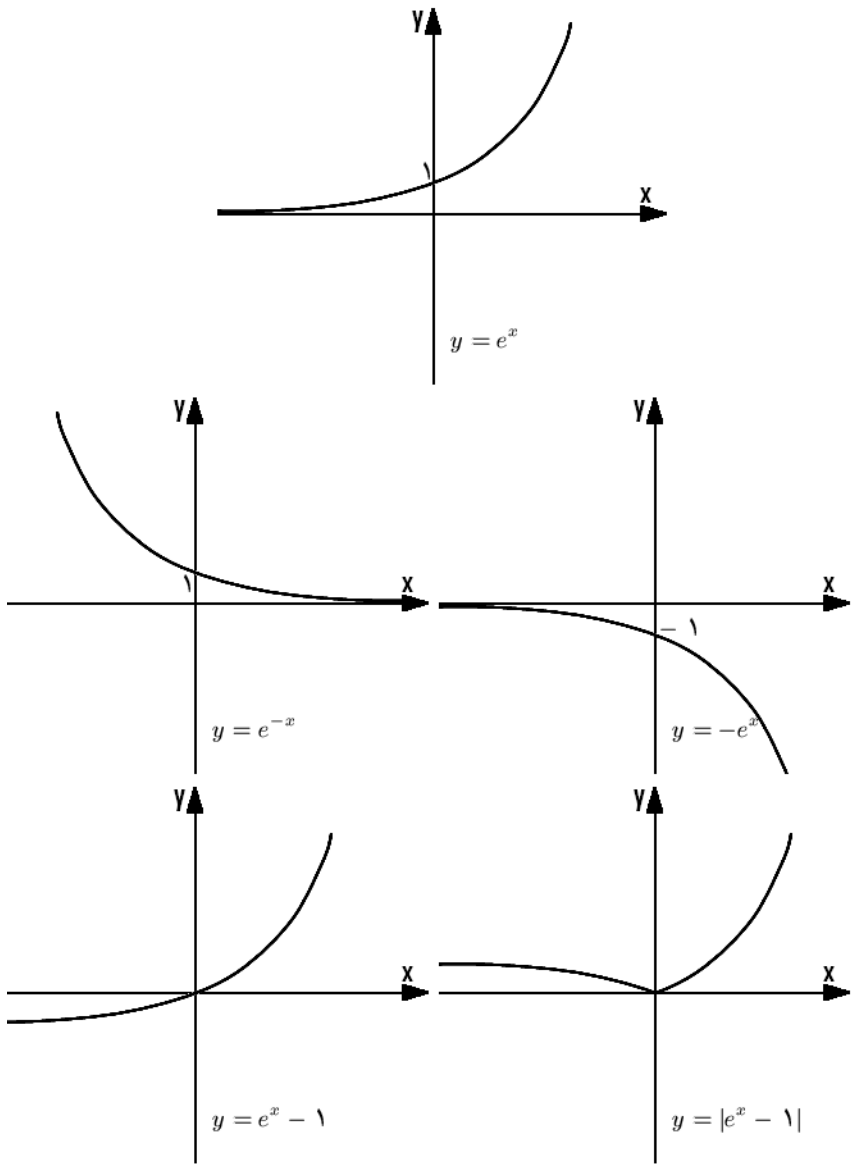
مطابق پنج بند بالا با انجام تغییراتی که در نمودار $y = f(x)$ در جهت یا حول محورها انجام شده، نمودار توابعی مانند $y+b = f(x+a)$ بدست می آید. در شکل۲.۷ نمودار تابع $y = f(x)$ معلوم است و a و b مثبت و دلخواهند. برای بدست آوردن نمودار تابع $y = f(x-a) - b$ کافی است چند نقطه از نمودار تابع ابتدائی را انتخاب و آنها را به اندازهٔ a در جهت مثبت محور طولها و بطرف راست ($-a < ۰$) و به اندازهٔ b بطرف پائین (چون b منفی است) حرکت دهیم. انتخاب مناسب نقاط نمودار اولیه، در دقیق تر یافتن نمودار تابع دوم بسیار موثر است.



شکل ۲.۷ انتقال نمودار به اندازه $a > ۰$ و $b > ۰$

در شکل۳.۷ نمودار $y = e^x$ را در نظر گرفتیم. $y = e^{-x}$ قرینه‌ای نسبت به محور عرضها دارد و نمودار $y = -e^x$ از قرینهٔ منحنی اصلی حول محور طولها به دست می آید. برای نمودار $y = e^x - ۱$ کافیست نمودار اصلی را یک واحد پائین بیاوریم و همین نمودار را در قدرمطلق

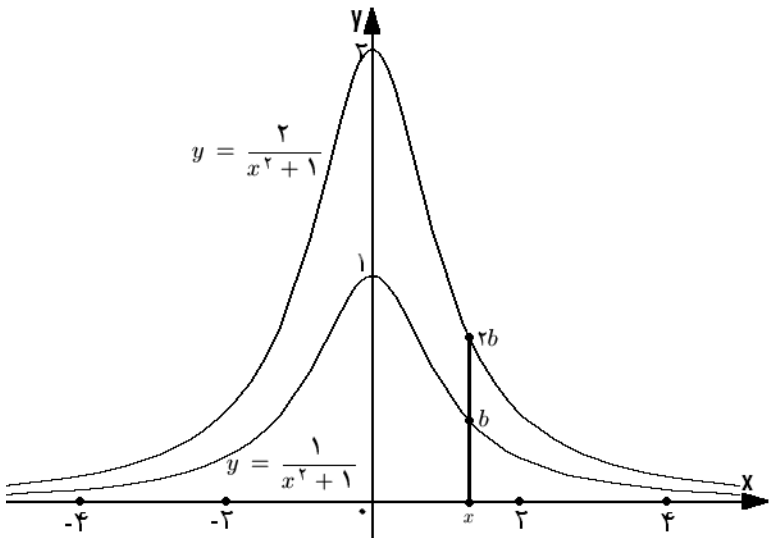
قرارداده، نمودار $y = |e^x - ۱|$ حاصل می شود که برای اینکار قسمت پائینی $y = e^x - ۱$ را به بالای محور طولها انتقال داده‌ایم.



شکل ۳.۷ انتقال در نمودار $y = e^x$

مطلب ۱.۷ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ موجود باشد برای رسم نمودار تابع $y = cf(x)$ کافیست هر نقطه از نمودار $y = f(x)$ را در عدد c ضرب کنیم. اگر $|c| > ۱$ نمودار بازتر می شود و اگر $|c| < ۱$ نمودار جمع تر خواهد شد.

شکل۴.۷ نمودار دو تابع را نشان می دهد، یکی تابع $y = \frac{۱}{x^۲ + ۱}$ در پائین و دیگری نمودار تابع $y = \frac{۲}{x^۲ + ۱}$ که در بالاتر قرار گرفته است. ضابطهٔ دو تابع نشان می دهد که هر نقطه از نمودار $y = \frac{۲}{x^۲ + ۱}$ عرضی دو برابر همان نقطه در نمودار $y = \frac{۱}{x^۲ + ۱}$ دارد. پس برای هر نقطهٔ $(x, ۲b)$ کافی است عرض هر نقطهٔ (x, b) را دو برابر کرده و نقطهٔ نمودار دوم را بیابیم.



شکل ۴.۷ عرض هر نقطه از نمودار بالاتر دو برابر عرض نمودار پائینی است.

تمرین ۱.۷ .

۱) با استفاده از روش نقطه یابی نمودار تابع درجه سه $y = x^۳$ را رسم کرده و سپس نمودارهای زیر را با استفاده از آن رسم کنید.

$$y = (x+۲)^۳ \quad , \quad y = x^۳+۲ \quad , \quad y = x^۳-۱ \quad , \quad y = (x+۱)^۳+۱ \quad , \quad y = (x-۲)^۳+۲$$

۲) نمودار سهمی $y = x^۲$ را رسم کرده و با استفاده از آن نمودار توابع زیر را بیابید.

$$y = ۲x^۲ \quad , \quad y = \frac{۱}{۲}x^۲ \quad , \quad y = ۳x^۲-۱ \quad , \quad y = ۲(x+۱)^۲+۱ \quad , \quad y = (۲x)^۲$$

۲.۷ ترکیب توابع

می توان گفت اکثر توابع ریاضی توابعی ترکیبی اند که از ترکیب دو یا چند تابع ساده حاصل می شوند. در ترکیب توابع، دامنه و برد تغییر نموده و دامنه و برد تابع حاصل، ترکیبی متفاوت از دامنه و برد توابع اولیه می باشد. مثلاً از ترکیب دو تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sin x$ دو تابع $\sqrt{\sin x}$ و $\sin\sqrt{x}$ حاصل می گردد که کاملاً با توابع نخستین متفاوتند. ترکیب دو تابع و دامنهٔ حاصل بصورت زیر تعریف می گردد.

توابع $f:A\to\mathbb{R}$ و $g:B\to A$ مفروضند. ترکیب تابع f با g که با نماد fog نمایش داده می شود بصورت $fog(x)=f(g(x))$ تعریف شده و دامنهٔ آن عبارتست از

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}$$

مثال ۱.۷ برای توابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$ تابع gof و دامنهٔ آن D_{gof} را حساب کنید.

حل. طبق تعریف ترکیب توابع می نویسیم:

$$gof(x)=g(f(x))=g\left(\frac{۱}{x^۲-۱}\right)=\sqrt{\left(\frac{۱}{x^۲-۱}\right)+۱}$$

و از آنجاکه $D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$ و $D_g=[-۱,+\infty)$ است داریم:

$$\begin{aligned}D_{gof}&=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}\\&=\{x\in\mathbb{R}-\{-۱,۱\}\Big|\frac{۱}{x^۲-۱}\geq-۱\}\\&=\{x\in\mathbb{R}-\{-۱,۱\}\Big|\frac{x^۲}{x^۲-۱}\geq ۰\}\\&=(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)\end{aligned}$$

مطلب ۲.۷ ترکیب دو تابع چند ضابطه‌ای نیز، روی دامنهٔ مشترکشان قابل تعریف است. مثلاً برای توابع

$$f(x)=\begin{cases}x^۲-۱ & ,x\geq ۱\ \text{اگر}\\ ۲x & ,x<۱\ \text{اگر}\end{cases}$$

و

$$g(x)=\begin{cases}۲x^۳+۱ & ,x\geq ۰\ \text{اگر}\\ ۴x+۱ & ,-۱\leq x<۰\ \text{اگر}\\ -۱-۲x & ,x<-۱\ \text{اگر}\end{cases}$$

ترکیب fog بصورت زیر است:

$$fog(x)=\begin{cases}(۲x^۳+۱)^۲-۱ & ,x\geq ۰ \text{ اگر}\\ ۲(۴x+۱) & ,-۱\leq x<۰ \text{ اگر}\\ (-۱-۲x)^۲-۱ & ,x<-۱ \text{ اگر}\end{cases}$$

مثال ۲.۷ آیا برای توابع $f(x)=e^x$ و $g(x)=\ln x$ ترکیبات fog و gof برابرند.

حل. طبق تعریف ترکیب توابع می نویسیم:

$$\begin{aligned} fog(x) &= f(g(x))=f(\ln x)=e^{\ln x}=x\\ gof(x) &= g(f(x))=g(e^x)=\ln(e^x)=x\end{aligned}$$

و بنابراین ضابطهٔ این دو تابع با هم برابر است. برای دامنه هایشان داریم:

$$\begin{aligned} D_{fog} &= \{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{x\in(۰,+\infty)\Big|\ln x\in\mathbb{R}\}=(۰,+\infty)\\ D_{gof} &= \{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\Big|e^x>۰\}=\mathbb{R}\end{aligned}$$

و بنابراین $D_{fog}\neq D_{gof}$ و توابع ترکیبی fog و gof با هم برابر نیستند.

تمرین ۲.۷ .

۱) اگر $f(x)=\dfrac{۲x-۱}{x-۵}$ و $g(x)=۲\sqrt{x}-۱$ مقادیر gof و D_{gof} را حساب کنید.

۲) اگر $g(x)=\dfrac{x}{x+۴}$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۱}$ مقادیر fog و D_{fog} را حساب کنید.

۳) آیا برای توابع $f(x)=\dfrac{x-۱}{x+۲}$ و $g(x)=\dfrac{۱+۲x}{۱-x}$ ترکیبات fog و gof برابرند.

۴) ترکیب fog و gof دو تابع چند ضابطه‌ای زیر را بنویسید.

$$f(x)=\begin{cases}x+۳ & ,x\geq -۱ \text{ اگر}\\ x^۲-۴ & ,x<-۱ \text{ اگر}\end{cases}$$

و

$$g(x)=\begin{cases}x^۲+۱ & , \quad x\geq ۱ \text{ اگر}\\ -x-۱ & , ۰\leq x<۱ \text{ اگر}\\ x^۲-۱ & , \quad x<۰ \text{ اگر}\end{cases}$$

۳.۷ خواص توابع

اکنون خواصی را که برخی توابع دارا بوده را بررسی کرده و این طریقهٔ آگاهی، روی عناصر ریاضی متداول است. علاوه بر این با استفاده از خواص توابع، نمودار هندسی شان را نیز بهتر خواهیم شناخت.

۱.۳.۷ توابع صعودی و نزولی

تابع f را صعودی گوئیم اگر $x_۱ \leq x_۲$ نتیجه دهد که $f(x_۱) \leq f(x_۲)$،
تابع f را نزولی گوئیم اگر $x_۱ \leq x_۲$ نتیجه دهد که $f(x_۱) \geq f(x_۲)$.

مثال ۳.۷ تابع $f(x) = ۳x + ۴$ صعودی است زیرا

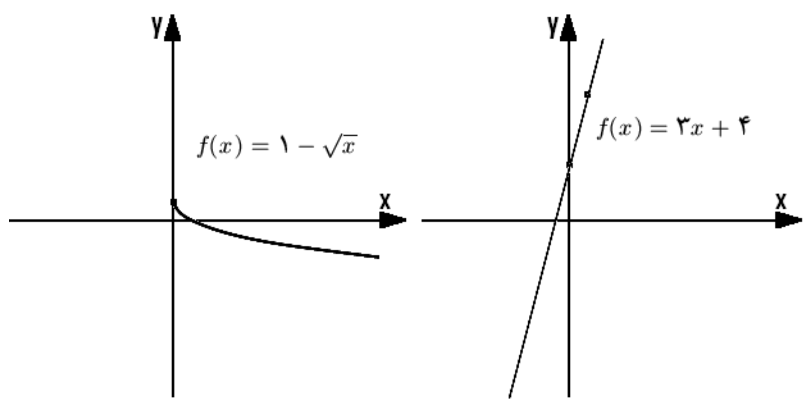
$$x_۱ \leq x_۲ \Rightarrow ۳x_۱ \leq ۳x_۲ \Rightarrow ۳x_۱ + ۴ \leq ۳x_۲ + ۴ \Rightarrow f(x_۱) \leq f(x_۲)$$

در واقع هر خط با شیب مثبت، صعودی و با شیب منفی نزولی است.

مثال ۴.۷ صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x) = ۱ - \sqrt{x}$ را مشخص نمائید.

حل. این تابع نزولی است زیرا روی اعداد مثبت داریم:

$$\begin{aligned} x_۱ &\leq x_۲ \\ \sqrt{x_۱} &\leq \sqrt{x_۲} \\ -\sqrt{x_۱} &\geq -\sqrt{x_۲} \\ ۱ - \sqrt{x_۱} &\geq ۱ - \sqrt{x_۲} \\ f(x_۱) &\geq f(x_۲) \end{aligned}$$



شکل ۵.۷ نمودار تابع صعودی مثال ۳.۷ و تابع نزولی مثال ۴.۷

در حالت کلی یک تابع می تواند در برخی فواصل صعودی و در برخی فواصل نزولی باشد ولی تابعی که فقط صعودی و یا فقط نزولی است را **تابع یکنوا** گوئیم.

۲.۳.۷ تابع زوج و فرد

تابع f را **زوج** گوئیم اگر دارای دو شرط زیر باشد.

۱) برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $-x \in D_f$

۲) $f(-x) = f(x)$

تابع f را **فرد** گوئیم اگر دارای دو شرط زیر باشد.

۱) برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $-x \in D_f$

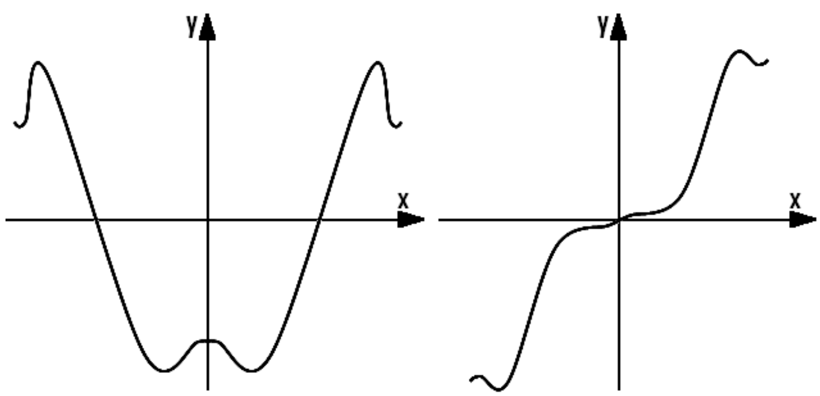
۲) $f(-x) = -f(x)$

مثال ۵.۷ تابع $g(x) = -۳x^۲ + ۹$ تابعی زوج است زیرا

$$g(-x) = -۳(-x)^۲ + ۹ = -۳x^۲ + ۹ = g(x)$$

و تابع $h(x) = ۵x^۳ - x$ تابعی فرد است چون

$$h(-x) = ۵(-x)^۳ - (-x) = -۵x^۳ + x = -(۵x^۳ - x) = -h(x)$$



شکل ٦.۷ نمودار تابع فرد (راست) و زوج (چپ) که تقارن را تداعی می کنند.

عموماً توابع چند جمله‌ای که توان زوج دارند یا عددند توابعی زوج و آنها که توانهایی فرد دارند توابعی فردند. بنابراین تابع $f(x) = x^۳ - ۲x^۲ + ٦x + ۷$ نه زوج است نه فرد، زیرا هم دارای توانهای زوج است و هم دارای توانهای فرد. توابع $\sin x$، $\tan x$، $\cot x$ و $\sinh x$ توابعی فرد و توابع $\cos x$ و $\cosh x$ توابعی زوج است. از نظر نموداری تابع زوج نسبت به محور عرضها متقارن و تابع فرد نسبت به مبداء مختصات متقارن است. براحتی می توان خیلی از نمودارها را رسم نمود که نه نسبت به محور عرضها متقارن باشند و نه نسبت به مبداء مختصات و این نشان می دهد که خیلی از توابع نه زوجند و نه فرد.

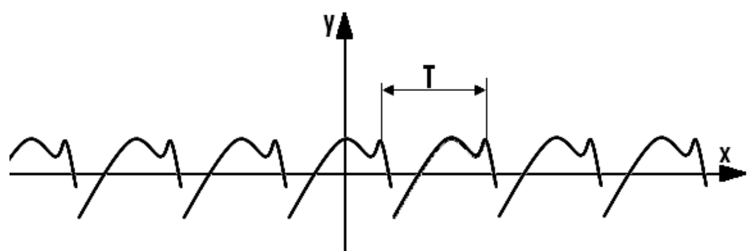
تمرین ۳.۷ زوج و فرد بودن توابع زیر را مشخص کنید.

$$f(x)=x^{۴}-۵x^{۲}+۱ \quad , \quad g(x)=۳\sin ۴x+۳x^{۳}+۲x \quad , \quad h(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۱}$$

$$i(x)=۳\sqrt{x}+۲ \quad , \quad j(x)=\frac{e^{x}-۱}{e^{x}+۱} \quad , \quad k(x)=|x|+۱$$

۳.۳.۷ تابع متناوب

تابع حقیقی f را متناوب با **دوره تناوب** T گوئیم اگر $f(x+T)=f(x)$. اینگونه توابع در هر فاصله مرتباً تکرار می شوند و بنابراین می توان آنها را در همان فاصلهٔ تناوبشان بررسی نمود.



شکل ۷.۷ نمودار تابعی متناوب که در فاصله‌ای خاص تکرار می شود.

مثال ۶.۷ تابع $f(x)=۳\sin x$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T=۲\pi$ است زیرا

$$f(x+۲\pi)=۳\sin(x+۲\pi)=۳\sin x=f(x)$$

توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ توابعی متناوب با دوره تناوب ۲π و توابع $y=\tan x$ و $y=\cot x$ توابعی متناوب با دوره تناوب π هستند (بخش۴.۷).

مثال ۷.۷ تابع $g(x)=x-[x]+۲$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T=۱$ است زیرا

$$g(x+۱)=(x+۱)-[x+۱]+۲=x+۱-[x]-۱+۲=x-[x]+۲=g(x)$$

مثال ۸.۷ مطلوبست تعیین دوره تناوب تابع $y=۳x-[۳x]$.

حل. با فرض دوره تناوب مثبتی مانند T طبق تعریف تناوب داریم:

$$\begin{aligned} ۳(x+T)-[۳(x+T)] &= ۳x-[۳x] \\ ۳T-[۳x+۳T] &= -[۳x] \\ [۳x+۳T]-[۳x] &= ۳T\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

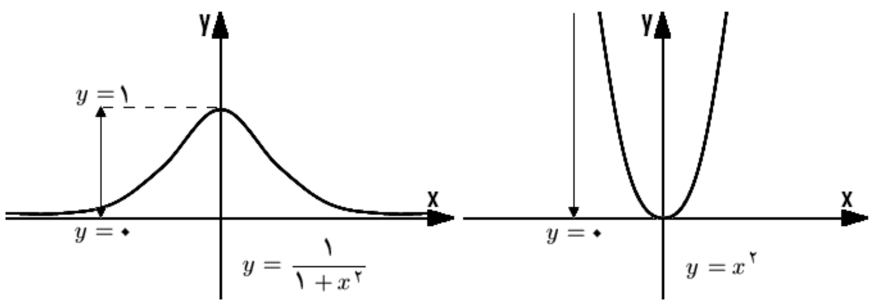
برای کوچکترین تناوب $۳T=۱$ (کوچکترین عدد طبیعی) بوده پس $T=\frac{۱}{۳}$ تناوب تابع است.

۴.۳.۷ تابع کراندار

تابع f را **از بالا کراندار** نامیم هرگاه مقادیر آن از عددی مانند M کمتر باشند $f(x) \le M$. همچنین تابع f را **از پائین کراندار** گوئیم اگر مقادیر این تابع از عددی مانند N بیشتر باشند $f(x) \ge N$. تابع f کراندار است اگر $N \le f(x) \le M$ که M و N اعدادی حقیقی‌اند.

مثال ۹.۷ تابع $y = \frac{۱}{۱+x^۲}$ تابعی کراندارست زیرا صورت و مخرجش مثبت بوده و نیز از $x^۲ \ge ۰$ داریم $۱ + x^۲ \ge ۱$ و $\frac{۱}{۱+x^۲} \le ۱$ یعنی تابع همیشه بین ۰ و ۱ قرار می گیرد و $۰ < \frac{۱}{۱+x^۲} \le ۱$. نمودار تابع مطابق شکل ۸.۷ است.

مثال ۱۰.۷ سهمی $y = x^۲$ از پائین کراندار بوده $(x^۲ \ge ۰)$ ولی از بالا کراندار نیست (شکل ۸.۷).



شکل **۸.۷** توابع کراندار

۵.۳.۷ تقارن

همچنانکه دیدیم تابع زوج نسبت به محور عرضها متقارن بوده و تابع فرد نسبت به مبداء مختصات متقارن است. اینگونه تقارن ها در نمودار توابع و یا بطورکلی اشکال، به شناخت کلی تابع بهتر کمک کرده و خواص ویژه‌ای را در آنها آشکار می کند.

دو نقطهٔ $A(x,y)$ و $A'(x',y')$ را نسبت به نقطهٔ $M(\alpha,\beta)$ متقارن گوئیم اگر M وسط پاره‌خط AA' باشد یعنی

$$\alpha = \frac{x+x'}{۲} \ , \ \beta = \frac{y+y'}{۲}$$

یا

$$x' = ۲\alpha - x \ , \ y' = ۲\beta - y$$

بدین ترتیب برای بدست آوردن A'، قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به $M(\alpha,\beta)$ کافیست بجای x قرار دهیم $۲\alpha - x$ و بجای y قرار دهیم $۲\beta - y$. تقارن حول یک نقطه را **تقارن مرکزی** گوئیم.

مثال ۱۱.۷ نقاط $A(۱,۳)$ و $B(۷,۱)$ نسبت به نقطهٔ $C(۴,۲)$ متقارنند زیرا

$$۴=\frac{۱+۷}{۲} \quad , \quad ۲=\frac{۳+۱}{۲}$$

مثال ۱۲.۷ قرینهٔ نقطهٔ $A(۳,۵)$ نسبت به نقطهٔ $M(۴,-۲)$ چیست؟

$$x'=۲(۴)-۳=۵ \quad , \quad y'=۲(-۲)-۵=-۹ \Longrightarrow A'(۵,-۹)$$

فرمول تقارن حول یک نقطه، برای نقاط واقع بر نمودار یک تابع نیز برقرار است بدین ترتیب که قرینهٔ تابع $f(x,y)=۰$ نسبت به $M(\alpha,\beta)$ عبارتست از $f(۲\alpha-x,۲\beta-y)=۰$. قرینهٔ تابع صریح $y=f(x)$ نسبت به $M(\alpha,\beta)$ عبارتست از $۲\beta-y=f(۲\alpha-x)$.

مثال ۱۳.۷ قرینهٔ تابع $y=۳x^۳-۵x+۲$ را نسبت به نقطهٔ $(-۱,۲)$ بیابید.

حل. بجای x مقدار $-۲-x$ و بجای y نیز عبارت $۴-y$ را جایگزین می کنیم پس داریم:

$$\begin{aligned}
۴-y &= ۳(-۲-x)^۳-۵(-۲-x)+۲ \\
۴-y &= ۳(-۸-۱۲x-۶x^۲-x^۳)+۱۰+۵x+۲ \\
y &= ۳x^۳+۱۸x^۲+۳۱x+۱۶
\end{aligned}$$

تابع $f(x,y)=۰$ را نسبت به نقطهٔ $M(\alpha,\beta)$ **متقارن** گوئیم اگر $f(۲\alpha-x,۲\beta-y)\equiv f(x,y)$.
همچنین تابع $y=f(x)$ را نسبت به نقطهٔ $M(\alpha,\beta)$ **متقارن** گوئیم اگر $۲\beta-f(x)\equiv f(۲\alpha-x)$.
در این حالت نقطهٔ M را **مرکز تقارن** تابع $f(x,y)=۰$ نامیم.

مثال ۱۴.۷ مرکز تقارن تابع $y=x^۳-۲۷x+۳$ را پیدا کنید.

حل.

$$\begin{aligned}
۲\beta-f(x) &\equiv f(۲\alpha-x) \\
۲\beta-(x^۳-۲۷x+۳) &\equiv (۲\alpha-x)^۳-۲۷(۲\alpha-x)+۳ \\
-x^۳+۲۷x-۳+۲\beta &\equiv -x^۳+۶\alpha x^۲+(۲۷-۱۲\alpha^۲)x+۸\alpha^۳-۵۴\alpha+۳
\end{aligned}$$

با تساوی ضرایب طرفین داریم $\alpha=۰$ و $\beta=۳$ و نقطهٔ $M(۰,۳)$ مرکز تقارن تابع است.

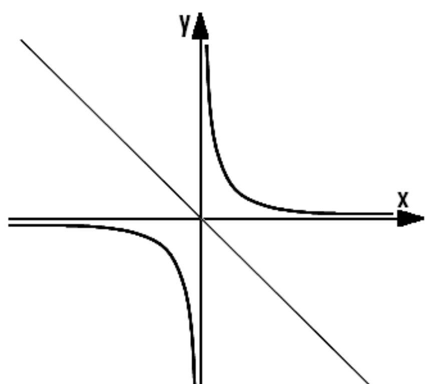
مطلب ۳.۷ با استفاده از مطالب بالا **تقارن مرکزی** حول یک نقطهٔ $M(\alpha,\beta)$ بصورت زیر بیان می شود:

- قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت به محور x–ها عبارتست از $A(x,-y)$.
- قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت به محور y–ها عبارتست از $A(-x,y)$.
- قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت به مبداء مختصات عبارتست از $A(-x,-y)$.

- گوئیم منحنی $f(x,y)=\circ$ نسبت به محور y–ها متقارن است اگر $f(-x,y)=\circ$. بعبارتی اگر x را با $-x$ در معادله عوض کنیم تغییری در معادله حاصل نشود. در این حالت گوئیم تابع زوج است.
- گوئیم منحنی $f(x,y)=\circ$ نسبت به محور x–ها متقارن است اگر $f(x,-y)=\circ$. یعنی وقتی y را با $-y$ در معادله عوض می کنیم تغییری در معادله حاصل نشود. این منحنی، نمودار یک تابع نخواهد بود.
- گوئیم منحنی $f(x,y)=\circ$ نسبت به مبداء مختصات متقارن است اگر $f(-x,-y)=\circ$. پس اگر x را با $-x$ و y را با $-y$ در معادله عوض کنیم تغییری در معادله حاصل نخواهد شد. در این حالت گوئیم تابع فرد است.

مثال ۱۵.۷ نشان دهید نمودار تابع $xy=۱$ نسبت به مبداء متقارن است.

حل. با تغییر x را با $-x$ و y را با $-y$ در معادله $(-x)(-y)=۱$ و همان تابع $xy=۱$ حاصل می شود (شکل۹.۷ زیر).



شکل ۹.۷ نمودار تابع $xy=۱$

تمرین ۴.۷ .

۱) مرکز تقارن توابع زیر را بیابید.

$$(a)\quad ۲xy-x-y+۱=\circ \quad , \quad (b)\quad ۵x+۴y=۲ \quad , \quad (c)\quad y=-x^{۳}-۳x^{۲}+۳$$

$$(d)\quad x-۲xy-۴y=۱ \quad , \quad (e)\quad y=\frac{x-۲}{x+۴} \quad , \quad (f)\quad y=x^{۳}-۳x^{۲}+۴$$

$$(g)\quad x+xy=۳ \quad , \quad (h)\quad (y-۲x)(x+y-۳)=۱$$

۲) نموداری مثال بزنید که نسبت به هیچ خطی و یا نقطه ای متقارن نباشد.

۳) نشان دهید نمودار تابع $xy=۱$ نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم $(y=-x)$ متقارن می باشد (شکل۹.۷). این نوع تقارن را **تقارن محوری** نامیم.

۴.۷ توابع مثلثاتی

از آنجا که برای هر زاویهٔ **دلخواه** می توان مقادیر نسبتهای چهارگانه را بدست آورد، به همین ترتیب می توان بجای مقدار زاویه، متغیری دلخواه مانند x قرار داد. در این حالت نسبت های $\sin x$ و $\cos x$ و $\tan x$ و $\cot x$ برای مقادیر مختلف x، یک مقدار حقیقی خواهند بود و آنها را **توابع مثلثاتی** نامیم. پس توابع مثلثاتی عبارتند از:

$$y = \sin x \quad , \quad y = \cos x \quad , \quad y = \tan x \quad , \quad y = \cot x$$

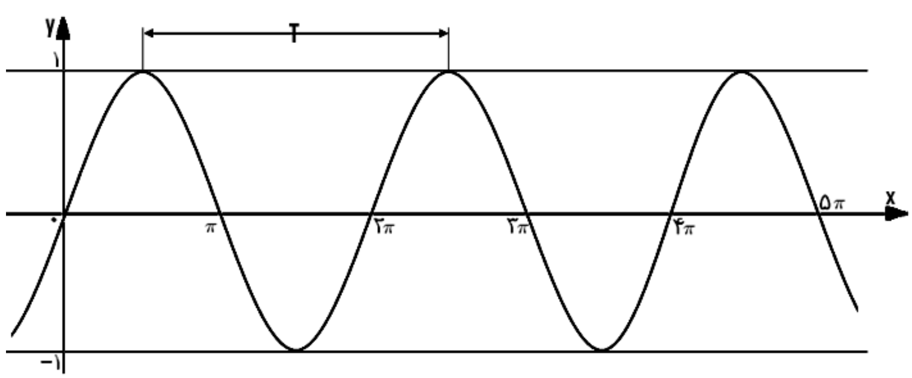
که x متغیری دلخواه بوده و معمولاً برحسب **رادیان** بیان می شود. همچنین توابع $y = \sec x$ و $y = \csc x$ نیز گاهی قابل استفاده اند. کلیهٔ روابطی که بین نسبتهای مثلثاتی برقرار بود، برای توابع مثلثاتی نیز برقرار می باشد.

۱.۴.۷ تابع $y = \sin x$

دامنهٔ تابع سینوس اعداد حقیقی $D_{\sin} = \mathbb{R}$ و برد آن $R_{\sin} = [-۱, ۱]$ است بنابراین کلیهٔ مقادیر حقیقی را می پذیرد ولی مقادیر آن بین ۱ و ۱− قرار می گیرند پس تابعی کراندار است یعنی $-۱ \leq \sin x \leq ۱$. این تابع، متناوب با دورهٔ تناوب $T = ۲\pi$ است. با شروع از زاویه صفر و یافتن مقادیری از سینوس در یک دورهٔ تناوب، جدول زیر از مقادیر تابع $y = \sin x$ را تشکیل می دهیم:

x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$۳\frac{\pi}{۴}$	π	$۵\frac{\pi}{۴}$	$۳\frac{\pi}{۲}$	$۷\frac{\pi}{۴}$	۲π
$\sin x$	۰	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۰	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۰

که شکل سینوسی زیر را ایجاد کرده و تقارن آن نسبت به مبداء نشان از فرد بودن تابع است.



شکل ۱۰.۷ نمودار تابع $y = \sin x$

۲.۴.۷ تابع $y = \cos x$

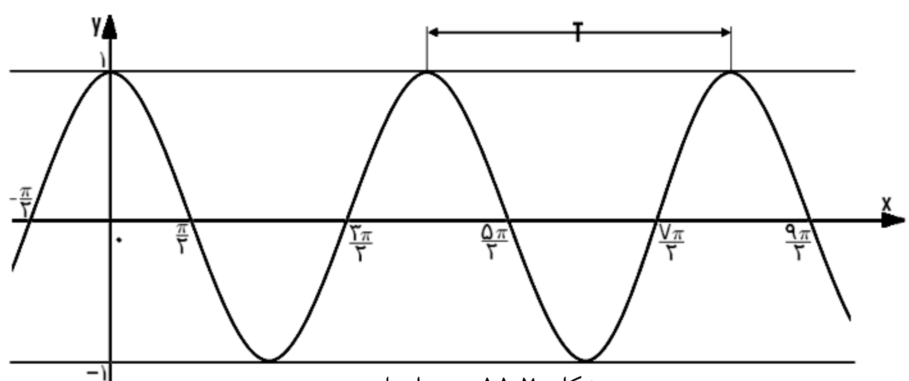
دامنهٔ تابع کسینوس اعداد حقیقی $D_{\cos} = \mathbb{R}$ و برد آن $R_{\cos} = [-۱, ۱]$ است و مانند سینوس تمامی مقادیر حقیقی را می پذیرد و حاصل آن تنها بین ۱ و ۱− قرار می گیرد بنابراین تابعی کراندار است یعنی

$$-۱ \leq \cos x \leq ۱$$

این تابع متناوب با دورهٔ تناوب $T = ۲\pi$ است. با شروع از زاویه صفر و یافتن کسینوس چند زاویه در یک دورهٔ تناوب، جدول زیر از مقادیر تابع $y = \cos x$ را تشکیل می دهیم:

x	$\circ$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$۳\frac{\pi}{۴}$	π	$۵\frac{\pi}{۴}$	$۳\frac{\pi}{۲}$	$۷\frac{\pi}{۴}$	۲π
$\cos x$	۱	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\circ$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\circ$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱

که شکل کسینوسی زیر را ایجاد کرده و تقارن آن نسبت به محور عرضها نشاندهندهٔ زوج بودن تابع است.



شکل ۱۱.۷ نمودار تابع $y = \cos x$

۳.۴.۷ تابع $y = \tan x$

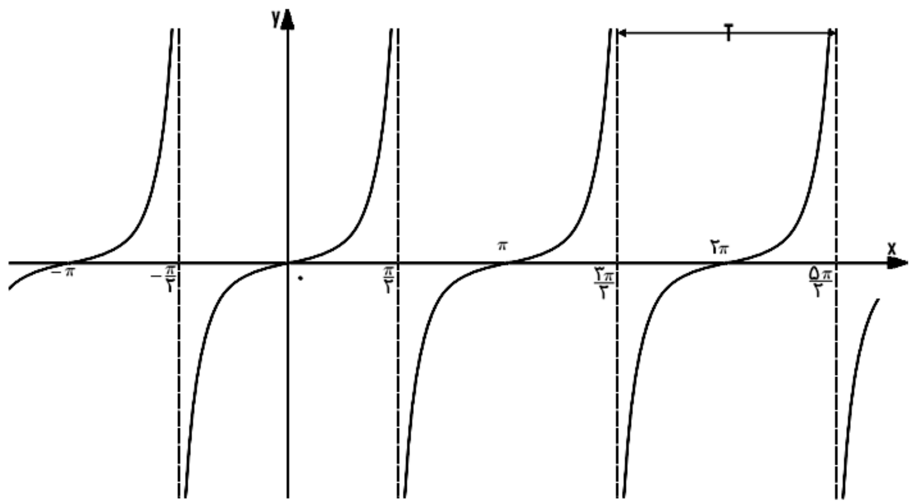
تابع تانژانت بخودی خود تابع مستقلی نیست و بشکل خارج قسمت $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ تعریف می شود که دامنهٔ آن عبارتست از $D_{\tan} = \mathbb{R} - \{(۲k+۱)\frac{\pi}{۲} \Big| k \in \mathbb{Z}\}$ یعنی اعداد حقیقی بجز اعدادی که مخرج تابع را صفر می کنند. برد این تابع تمام اعداد حقیقی $R_{\tan} = \mathbb{R}$ است پس کلیهٔ مقادیر حقیقی را بدست می دهد:

$$-\infty \leq \tan x \leq \infty$$

این تابع مثلثاتی متناوب با دورهٔ تناوب $T = \pi$ است و برای رسم نمودار آن با شروع از زاویه صفر و یافتن مقادیری از آن در یک دورهٔ تناوب $[\circ, \pi]$، جدول زیر از مقادیر تابع را تشکیل می‌دهیم:

x	$\circ$	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{٦}$	π
$\tan x$	$\circ$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	$+\infty \vert_{-\infty}$	$-\sqrt{۳}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\circ$

که شکل زیر را نشان داده و تقارن آن نسبت به مبداء نشان از فرد بودن تابع است.



شکل ۱۲.۷ نمودار تابع $y = \tan x$

در یک تناوب، تانژانت صعودی است و اگر $-\frac{\pi}{۲} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{۲}$ سپس $\tan \alpha < \tan \beta$ خواهد بود.

۴.۴.۷ تابع $y = \cot x$

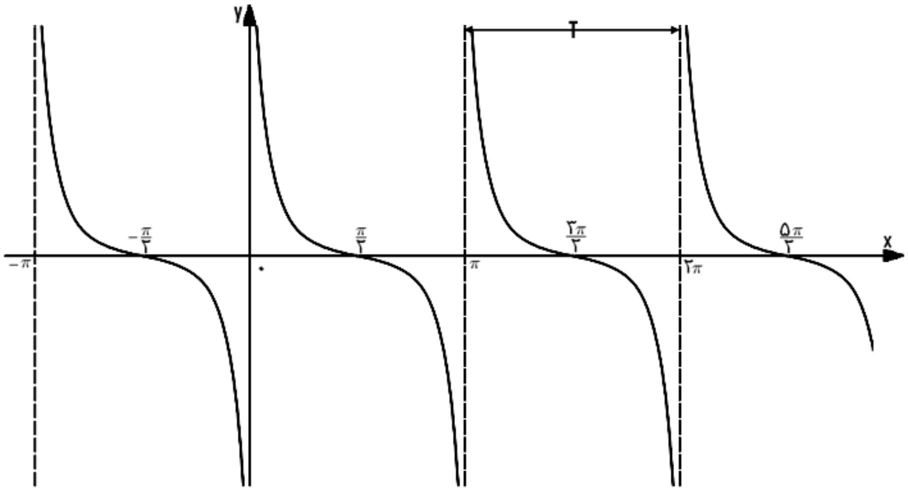
تابع کتانژانت با ضابطهٔ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ تعریف شده و دامنه اش $D_{\cot} = \mathbb{R} - \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ است یعنی اعداد حقیقی بجز ضرایب صحیح π. برد تابع تمام اعداد حقیقی است. $R_{\cot} = \mathbb{R}$

$$-\infty \leq \cot x \leq \infty$$

تابع کتانژانت متناوب با دورهٔ تناوب $T = \pi$ است و برای رسم نمودار آن، با شروع از زاویه صفر و با یافتن مقادیر تابع در یک دورهٔ تناوب، جدول زیر را تشکیل می دهیم:

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π
$\cot x$	$+\infty$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	-۱	$-\sqrt{۳}$	$-\infty$

نمودار حاصل نسبت به مبداء متقارن بوده و نشان می دهد که $y = \cot x$ تابعی فرد است.



شکل ۱۳.۷ نمودار تابع $y = \cot x$

در یک تناوب کتانژانت نزولی است و اگر $۰ < \alpha < \beta < \pi$ سپس $\cot \alpha > \cot \beta$.

تمرین ۵.۷ .

۱) دوره تناوب توابع $y = \sin ax$، $y = \cos ax$، $y = \tan ax$ و $y = \cot ax$ که a عددی حقیقی دلخواهی است چیست؟

۲) تابع $y = \sin ۲x$ را در یک دوره تناوبش رسم کنید.

۳) با استفاده از نمودار توابع مثلثاتی (اشکال۱۰.۷ تا ۱۳.۷) نمودار توابع زیر را رسم نمائید.

$$(a)\quad f(x) = ۲\sin x \qquad , \qquad (b)\quad f(x) = |\sin x|$$

$$(c)\quad f(x) = ۲|\cos x| \qquad , \qquad (d)\quad f(x) = |\tan x| + ۱$$

$$(e)\quad f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{۳}) \qquad , \qquad (f)\quad f(x) = ۲\sin x + \cos x$$

$$(g)\quad f(x) = \sin(x + \pi) \qquad , \qquad (h)\quad f(x) = -|\cot x| + ۱$$

۴) با رسم دقیقی از توابع $y = \sin x$ و $y = ۲\cos x$ در فاصلهٔ $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ ریشه های معادلهٔ $\sin x = ۲\cos x$ را بیابید.

۵.۷ وارون یک تابع

آنچه تحت عنوان وارون یا معکوس یک تابع بیان می شود، تابعی است که ترکیب آن با تابع اصلی برابر تابع همانی خواهد شد. از نظر نمودار، اگر تصویر نقاط نمودار تابعی را نسبت به خط $y = x$ بدست آوریم نموداری که حاصل می شود لزوماً تابع نیست. اما تحت شرایطی، نمودار معکوس شده تابع بوده و آنرا **تابع معکوس** یا **تابع وارون** نامیم. در ادامه به جزئیات موضوع می‌پردازیم.

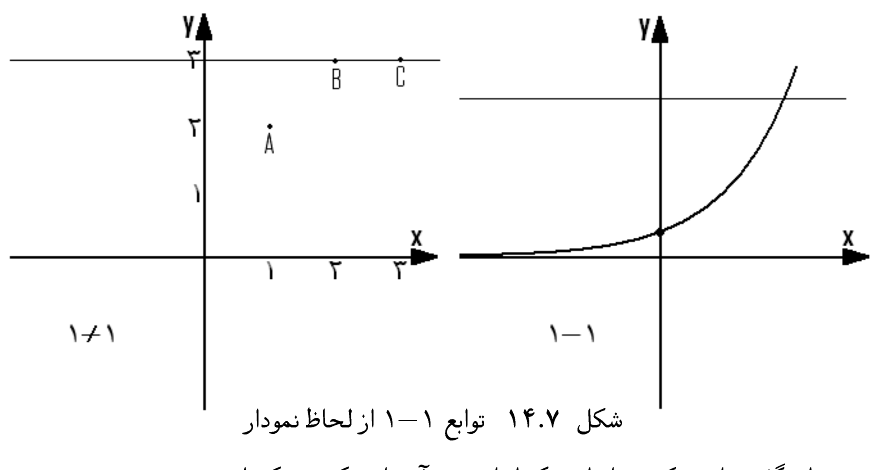
۱.۵.۷ تابع یک به یک

تابع $f : A \to B$ را **یک به یک (۱—۱)** گوئیم اگر بازای هر x و y در A که $f(x) = f(y)$ باشد نتیجه بگیریم که $x = y$.

از این تعریف بر می آید که تابعی ۱—۱ است که هیچ دو زوج مرتب متفاوت، با مولفه های دوم یکسان نداشته باشد برای مثال تابع

$$f = \{(۱, ۲), (۲, ۳), (۳, ۳)\}$$

تابعی ۱—۱ نیست زیرا دارای دو زوج مرتب با مولفه های دوم یکسان است. چنین تابعی غیر یک به یکی نموداری ملموس دارد از آن جهت که هر خط موازی محور طول ها آن را در بیش از یک نقطه قطع خواهد نمود. نمودارهای شکل۸.۷ هر دو توابعی غیر ۱—۱ هستند زیرا هر خط موازی محور طولها، آنها در دو نقطه قطع می کند. نمودار تابع سه نقطه‌ای f در فوق و تابع یک به یک $y = e^x$ در شکل۱۴.۷ آمده است.



شکل **۱۴.۷** توابع ۱—۱ از لحاظ نمودار

می توان گفت تابعی که بر بازه‌ای یکنوا باشد در آن بازه یک به یک است.

۲.۵.۷ تابع وارون (معکوس)

تابع یک به یک $f: A \to B$ را در نظر می‌گیریم. گوئیم تابعی مانند $g: B \to A$ تابع وارون f است اگر

$$fog(y) = y \quad ; \quad y \in D_g$$

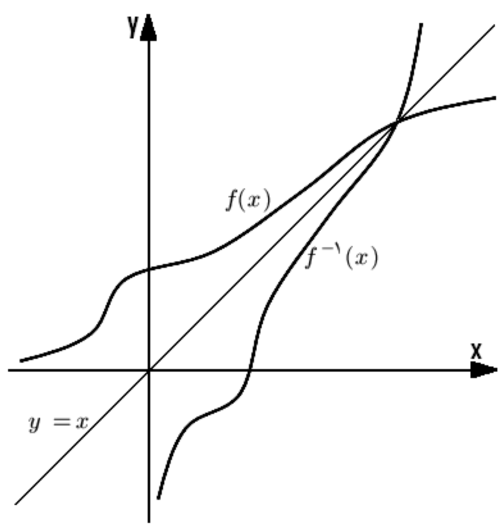
$$gof(x) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

تابع وارون تابع f را با f^{-1} نشان می دهیم. برای مثال توابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = x^2 - 1$ وارون یکدیگرند زیرا برای $x + 1 \geq 0$

$$gof(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = (\sqrt{x+1})^2 - 1 = x + 1 - 1 = x$$

یعنی برای $x \geq -1$ داریم $f^{-1}(x) = x^2 - 1$. اگر f یک به یک نباشد، دارای وارون نیست. همچنین از آنجا که تابع g مورد بحث یک به یک نبوده ولذا دارای وارون نیست، با محدود کردن دامنهٔ آن به $x \geq 0$ می توان آنرا **وارونپذیر** ساخته و بنویسیم $g^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$.

از لحاظ نموداری برای یافتن تابع وارون یک تابع کافیست انعکاس آنرا نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم که خط $y = x$ است، بدست آوریم. تقارن هر نقطهٔ (x, y) روی f نسبت به این نیمساز نقطهٔ (y, x) را روی نمودار f^{-1} مشخص می کند.

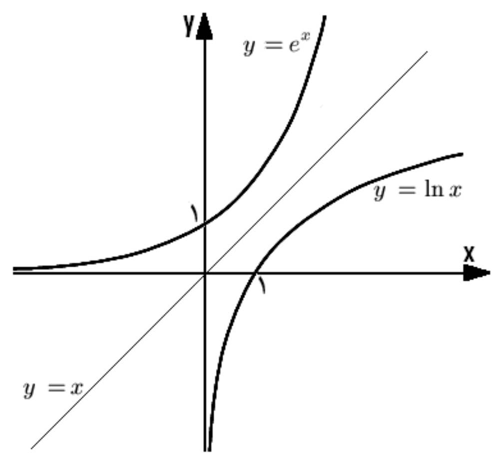


شکل ۱۵.۷ تابع فرضی که انعکاس آن نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم، تابع وارون آن را می سازد

مثال ۱۶.۷ وارون تابع $f(x)=\frac{۴x+۱}{x-۳}$ را بیابید.

حل. باتغییر نقش x و y می‌نویسیم $x=\frac{۴y+۱}{y-۳}$. با طرفین–وسطین $xy-۳x=۴y+۱$ و $xy-۴y=۱+۳x$ و با بدست آوردن y داریم $y=\frac{۱+۳x}{x-۴}$ بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{۱+۳x}{x-۴}$.

شبیه به این نیز، مثالی است از بدست آوردن تابع وارون که در خلال مثال۵.۱۰ گذشت. طبق تعریف تابع وارون $f(f^{-۱}(x))=x$ و $f^{-۱}(f(x))=x$ و برای ارتباط بین دامنه و برد تابع و وارون آن روابط $D_f=R_{f^{-۱}}$ و $R_f=D_{f^{-۱}}$ برقرار است. از معروفترین توابع وارونپذیر، که کاربرد زیادی دارند تابع نمائی $y=e^x$ و تابع وارون آن $y=\ln x$ است که در شکل۱۶.۷ زیر نشان داده شده اند.



شکل ۱۶.۷ تابع نمائی و تابع وارون آن تابع لگاریتمی

۳.۵.۷ توابع معکوس مثلثاتی

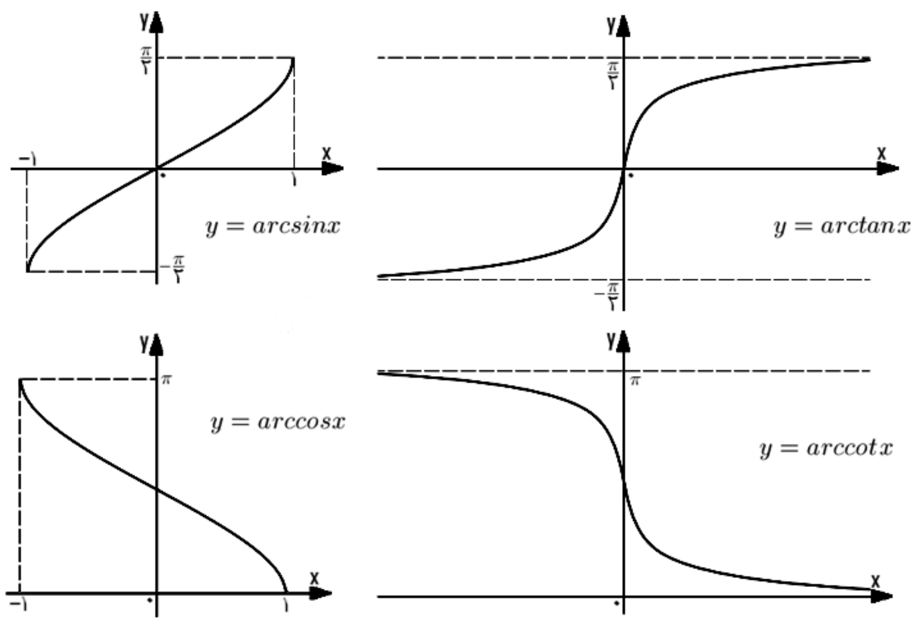
به عنوان توابعی کاربردی، توابع مثلثاتی نیز در بازه‌ای که ۱–۱ باشند دارای وارون می باشند. وارون تابع $\sin x$ را با $\arcsin x$ یا $\sin^{-۱} x$ نشان داده[۱] و آن عبارت از زاویه‌ای است که سینوس آن x است. پس اگر $\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$ باشد سپس $\arcsin\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۶}$ و به همین ترتیب توابع $\cos x$، $\tan x$ و $\cot x$ دارای معکوسند. توابع معکوس مثلثاتی مقادیر حقیقی را گرفته و زاویه را (بر حسب رادیان) در اختیار ما می گذارند. مثال های زیر را ببینید:

$$\arcsin ۱=\frac{\pi}{۲}\quad,\quad \arccos\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۳}\quad,\quad \arctan ۱=\frac{\pi}{۴}\quad,\quad arccot\,\sqrt{۳}=\frac{\pi}{۶}$$

[۱] ما در این کتاب برای معکوس مثلثاتی از arc استفاده می کنیم.

تابع $\sin x$ تنها در فاصلهٔ $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ یک به یک است و بنابراین معکوس آن $\arcsin x$ تنها در این فاصله تعریف شده است. به همین ترتیب معکوس تابع $\cos x$ را با $\arccos x$ نشان داده و چون $y = \cos x$ تنها در فاصلهٔ $[\circ , \pi]$ یک به یک است، بنابراین تنها در این فاصله وارون دارد. معکوس تابع $\tan x$ را با $\arctan x$ نشان داده که در فاصله $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ تعریف می گردد و معکوس تابع $\cot x$ را با $arccot\ x$ نشان می دهیم که در فاصلهٔ $[\circ , \pi]$ تعریف می شود. $\arcsin$ و $\arctan$ صعودی و دوتای دیگر نزولی اند.

$y = f(x)$	D_y	R_y
$y = \arcsin x$	$-۱ \leq x \leq ۱$	$-\frac{\pi}{۲} \leq y \leq \frac{\pi}{۲}$
$y = \arccos x$	$-۱ \leq x \leq ۱$	$\circ \leq y \leq \pi$
$y = \arctan x$	$x \in \mathbb{R}$	$-\frac{\pi}{۲} < y < \frac{\pi}{۲}$
$y = arccot\ x$	$x \in \mathbb{R}$	$\circ < y < \pi$
$y = arcsec\ x$	$\|x\| \geq ۱$	$\circ \leq y \leq \pi \ ,\ y \neq \frac{\pi}{۲}$
$y = arccsc\ x$	$\|x\| \geq ۱$	$-\frac{\pi}{۲} \leq y \leq \frac{\pi}{۲} \ ,\ y \neq \circ$



شکل ۱۷.۷ نمودار توابع معکوس مثلثاتی در فواصل تعریف شده

طبق تعریف تابع وارون $f(f^{-1}(x)) = x$ و $f^{-1}(f(x)) = x$ که این خاصیت برای توابع مثلثاتی و معکوس آنها نیز برقرار است. مثلاً

$$\arcsin(\sin x) = x \quad , \quad \sin(\arcsin x) = x$$

مثال ۱۷.۷ ثابت کنید برای $x < 0$

$$\arctan x = -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}$$

حل. ثابت می کنیم که $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ و برای اینکار با فرض $a = \arctan x$ و $b = \arctan\frac{1}{x}$ از فرمول تانژانت مجموع زوایا می نویسیم:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\tan(\arctan x) + \tan(\arctan\frac{1}{x})}{1 - \tan(\arctan x)\tan(\arctan\frac{1}{x})} = \frac{x + \frac{1}{x}}{1 - x\frac{1}{x}} = -\infty$$

زیرا $x < 0$. پس $a + b = -\frac{\pi}{2}$ که با جایگذاری فرضیات، مطلوب بدست می آید.

تمرین ۶.۷ .

۱) کدامیک از توابع زیر روی دامنهٔ شان یک به یکند؟

$$y = 3x + 1\ , \quad y = x^3 - 1\ , \quad y = 2x^2 + 5\ , \quad y = \frac{1}{x}\ , \quad y = \frac{2x - 1}{3x + 4}\ , \quad y = \ln|x|$$

۲) آیا دو تابع $f(x) = \frac{1}{1+x}$ و $h(x) = \frac{1-x}{x}$ وارون یکدیگرند؟

۳) وارون توابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{2-x}{2x+3}\ , \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad h(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\ , \quad i(x) = \sqrt{2x^2 - 1} + 7$$
$$j(x) = e^{3x} + 2\ , \quad k(x) = 2 - 5x\ , \quad l(x) = \frac{1}{2\sqrt{x} - 1}\ , \quad m(x) = \sqrt[3]{e^{3x} - 1}$$

۴) مقادیر عبارات مثلثاتی زیر را بیابید.

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\ , \quad \arcsin\frac{1}{2}\ , \quad \arcsin -1\ , \quad \arccos 1$$
$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\ , \quad \arctan(+\infty)\ , \quad arccot\ (-\infty)\ , \quad \arcsin -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\arccos(\cos\frac{6}{5}\pi)\ , \quad \cot(\arctan 1)\ , \quad \arctan 2 + \arctan 0/5\ , \quad \cos(\arccos\frac{1}{2})$$
$$\sec(\arcsin(-\frac{1}{2}))\ , \quad \arccos(\sin\frac{\pi}{3})\ , \quad \cos(\arcsin\tfrac{1}{2} + 2\arccos\tfrac{1}{2})\ , \quad arccot(\tan 2)$$
$$\cot(\arctan(-1))\ , \quad \sin(2\arcsin\tfrac{3}{5})\ , \quad \sin(\arcsin\tfrac{3}{4} - \arccos\tfrac{3}{4})\ , \quad \cos(\arcsin\frac{1}{2})$$

۵) ثابت کنید $\arctan x + arccot\ x = \frac{\pi}{2}$.

۶) نمودار توابع $arcsec\ x$ و $arccsc\ x$ را رسم نموده، دامنه و برد آنها را نیز تعیین نمائید.

۶.۷ توابع پارامتری

توابع پارامتری — که در برخی مباحث علمی کمک زیادی به تسهیل و فهم مطالب می نمایند— توابع خاص و مجزائی از توابع قبلی نیستند. هر تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^۲$ که یک مقدار مستقل را به دو مقدار می برد، یک **تابع پارامتری** نامیده می شود یعنی $f(t)=(x,y)$ که x و y هر کدام تابعی حقیقی بر حسب t هستند. چون استعمال این گونه توابع در فیزیک بیشتر رایج است، لذا متغیر مستقل را معمولاً t (زمان) فرض می کنند. ما نیز به تبعیت این کار را انجام داده و تابع پارامتری با دو متغیر وابسته x و y شکل زیر را بخود می گیرد:

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^۲ \\ f(t)=\big(x(t),y(t)\big)\end{cases}$$

که $x(t)$ و $y(t)$ توابعی حقیقی اند و $D_f\subseteq D_x\cap D_y$. برای مثال تابع

$$f(t)=(t^۳+۱,۳t-۱)$$

یک تابع پارامتری است. بازای $t=۱$ نقطهٔ $f(۱)=(۲,۲)$ مشخص کنندهٔ موقعیت تابع (مثلاً یک ذره) در صفحهٔ مختصات است.

بعضاً می توان از شکل پارامتری یک تابع، شکل صریح یا ضمنی تابع را بدست آورد و برای اینکار باید پارامتر t را بین توابع $x(t)$ و $y(t)$ حذف نمود.

مثال ۱۸.۷ تابع پارامتری $\begin{cases} x=۲t \\ y=۸t^۲-۱\end{cases}$ داده شده است. با حذف پارامتر t در معادلات، شکل صریح یا ضمنی تابع را بنویسید.

حل. چون $x=۲t$ پس $t=\frac{x}{۲}$ با جایگذاری در معادله دوم داریم $y=۸(\frac{x}{۲})^۲-۱$ که جواب، سهمی $y=۲x^۲-۱$ است.

مثال ۱۹.۷ با حذف پارامتر در تابع پارامتری $f(t)=(\sin t-۲,۲\cos t+۱)$ آنرا بشکل صریح یا ضمنی بنویسید ($\circ\le t<\pi$).

حل. از $\begin{cases} x=\sin t-۲ \\ y=۲\cos t+۱\end{cases}$ داریم $x+۲=\sin t$ و $\cos t=\frac{y-۱}{۲}$ که با توان رساندن و جمع طرفین، تابع ضمنی $(x+۲)^۲+\frac{(y-۱)^۲}{۴}=۱$ بدست می آید.

هر **تابع صریح** $y=f(x)$ را می توان بشکل پارامتری نوشت که ما این عمل را **پارامتری‌سازی** نامیم. برای این تابع می توان پارامتری‌سازی های گوناگونی را عنوان نمود که به ساده ترین شکل آنرا بصورت $\begin{cases} x=t \\ y=f(t)\end{cases}$ می توان آورد. برای پارامتری سازی بهتر یک تابع، آنرا از حالت پیچیده خارج و بشکل ملموستری می نویسیم مثلاً سعی می کنیم رادیکالها را با توان حذف کنیم.

به مثال های زیر توجه کنید:

$$y = x^3 \Longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases} \Longrightarrow f(t) = (t, t^3)$$

$$y = \frac{x^2}{4} - 1 \Longrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 - 1 \end{cases} \Longrightarrow f(t) = (2t, t^2 - 1)$$

$$y = \sqrt{x} + 2 \Longrightarrow \begin{cases} x = t^2 \\ y = t + 2 \end{cases} \Longrightarrow f(t) = (t^2, t + 2)$$

$$y = (x + 3)^4 \Longrightarrow \begin{cases} x = t - 3 \\ y = t^4 \end{cases} \Longrightarrow f(t) = (t - 3, t^4)$$

پارامتری سازی در واقع پیمایش لحظه‌ای منحنی است و پارامتری سازی های گوناگون مسیر یک ذره، چیزی جز تغییر پیمایش روی منحنی مسیر نیست.

(فیزیک) در فیزیک مکان یا موضع یک ذره را بصورت تابعی پارامتری نشان می دهند. مکان $t = 0$ مکان اولیهٔ ذره محسوب شده و $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ موقعیت ذره را در هر لحظهٔ $t(s)$ مشخص می کند. اگر ذره ای در امتداد مسیری روی صفحه از نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ حرکت کند و به نقطهٔ $B(x_2, y_2)$ برسد، جابجائی مستقیم الخطی به اندازهٔ

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

داشته است. بدین ترتیب **سرعت متوسط** ذره ای که جابجائی مستقیم الخط $|AB|$ متر را در زمان t ثانیه طی نموده برابر $\overline{v} = \frac{|AB|}{t}$ (متر بر ثانیه) معرفی می شود.

مثال ۲۰.۷ مکان ذره‌ای با تابع پارامتری $f(t) = (2t^2 + 1, 3t)$ مشخص شده است. مکان اولیهٔ ذره و نیز مکان آنرا در لحظهٔ $t = 1/5s$ بیابید.

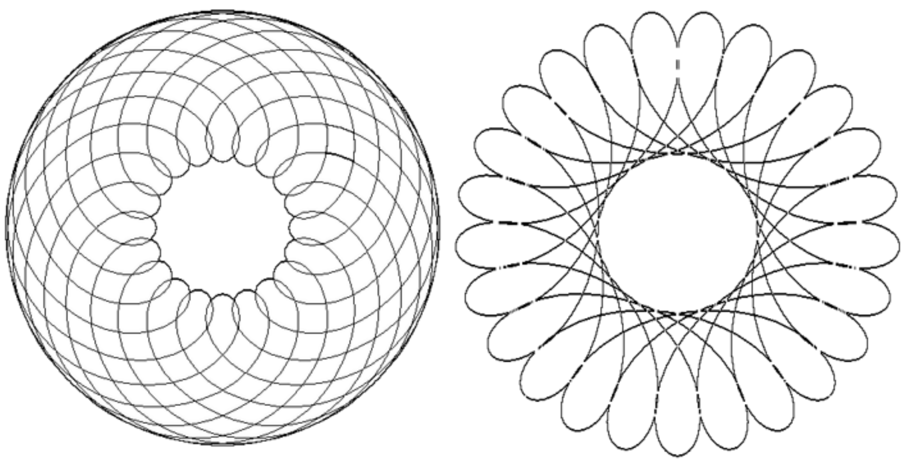
حل. مکان اولیهٔ ذره $f(0) = (1, 0)$ و در لحظهٔ $t = 1/5s$ در نقطهٔ $f(1/5) = (5/5, 4/5)$ واقع است.

مثال ۲۱.۷ موقعیت ذره‌ای در صفحه بشکل تابع پارامتری $f(t) = (t^2 - 1, 2t + 1)$ است. مکان ذره را در لحظات $t = 2s, 3s, 4s$ پیدا کنید. سرعت متوسط ذره از $2s$ تا $4s$ چقدر است؟

حل.

$$\begin{aligned} f(2) &= (2^2 - 1, 2(2) + 1) = (3, 5) && \text{مکان ذره در ثانیه دوم} \\ f(3) &= (8, 7) && \text{مکان ذره در ثانیه سوم} \\ f(4) &= (15, 9) && \text{مکان ذره در ثانیه چهارم} \\ |f(4) - f(2)| &= \sqrt{(15 - 3)^2 + (9 - 5)^2}\ m \\ &= \sqrt{160}m && \text{جابجایی ذره طی دو ثانیه} \\ \overline{v} &= \frac{\sqrt{160}}{2} = 6/3\frac{m}{s} \end{aligned}$$

(**معماری**) از مهمترین منحنی های پارامتری، **منحنی‌های بزییر**[۲] هستند که در طراحی اشکال مختلف، نمادهای گوناگون و حتی در طراحی تولیدات صنعتی بخصوص خودرو بکار گرفته می شود. در پروژه های آزمایشگاهی و طراحی های هدفمند سیستمی CAD نیز برای ایجاد قوس در خطوط از خواص منحنی های بزییر کمک گرفته می شود.



شکل **۱۸.۷** اشکالی که بر اساس طرح های بزییر و با نرم افزار $BezierDraw$ رسم شده‌اند.

یک منحنی بزییر درجه دو که توسط سه نقطهٔ مجزای $P_۰(x_۰, y_۰)$ و $P_۱(x_۱, y_۱)$ و $P_۲(x_۲, y_۲)$ معرفی می شود با معادلات پارامتری زیر بیان می گردد:

$$\begin{cases} x(t) = x_۰(۱-t)^۲ + ۲x_۱t(۱-t) + x_۲t^۲ \\ y(t) = y_۰(۱-t)^۲ + ۲y_۱t(۱-t) + y_۲t^۲ \end{cases} \quad , \quad ۰ \leq t \leq ۱$$

منحنی بزییر درجه سه نیز با چهار نقطهٔ مجزای

$$P_۰(x_۰, y_۰)\ ,\quad P_۱(x_۱, y_۱)\ ,\quad P_۲(x_۲, y_۲)\ ,\quad P_۳(x_۳, y_۳)$$

معرفی شده و دارای معادلات پارامتری زیر است:

$$\begin{cases} x(t) = x_۰(۱-t)^۳ + ۳x_۱t(۱-t)^۲ + ۳x_۲t^۲(۱-t) + x_۳t^۳ \\ y(t) = y_۰(۱-t)^۳ + ۳y_۱t(۱-t)^۲ + ۳y_۲t^۲(۱-t) + y_۳t^۳ \end{cases} \quad , \quad ۰ \leq t \leq ۱$$

دقت کنید که $t = ۰$ نقطهٔ شروع $P_۰$ و $t = ۱$ نقطهٔ انتهائی $P_۳$ را مشخص می کند. ضرایب جملات ظاهر شده در معادلات بزییر همان ضرایب مثلث خیام—نیوتن هستند.

---

[۲] $Bezier\ Curves$ — به افتخار ریاضیدان فرانسوی پی‌یر بزییر (۱۹۹۹ − ۱۹۱۰) $Pierre\ Bézier$ که در صنعت خودرو کارهای بسیار انجام داد.

مثال ۲۲.۷ با سه نقطهٔ $P_۰(۱,۱)$، $P_۱(۲,۳)$ و $P_۲(۳,۳)$ یک منحنی بزیر درجه دو بسازید. نشان دهید که این منحنی از نقطهٔ $P_۱$ عبور نمی کند.

حل. با استفاده از شکل پارامتری منحنی بزیر می نویسیم:

$$\begin{cases} x(t) = x_۰(۱-t)^۲ + ۲x_۱t(۱-t) + x_۲t^۲ \\ y(t) = y_۰(۱-t)^۲ + ۲y_۱t(۱-t) + y_۲t^۲ \end{cases} \quad , \quad ۰ \le t \le ۱$$

با جایگذاری نقاط $P_۰(۱,۱)$، $P_۱(۲,۳)$ و $P_۲(۳,۳)$ داریم:

$$\begin{cases} x(t) = ۱(۱-t)^۲ + ۴t(۱-t) + ۳t^۲ \\ y(t) = ۱(۱-t)^۲ + ٦t(۱-t) + ۳t^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = ۲t + ۱ \\ y(t) = -۲t^۲ + ۴t + ۱ \end{cases}$$

که $۰ \le t \le ۱$ است.

با حذف پارامتر t بین معادلات، معادلهٔ بزیر درجه دو $y = -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۳x - \frac{۳}{۲}$ بدست آمده و شرط درستی محاسبات این است که نقاط انتهائی باید در آن صدق کنند. شکل این سهمی را می توانید براحتی رسم نموده و نقاط بزیر را روی آن مشخص نمائید. این منحنی از نقطهٔ میانی $P_۱(۲,۳)$ عبور نمی کند زیرا بازای $x = ۲$ مقدار $y = ۲/۵$ را مشخص می کند.

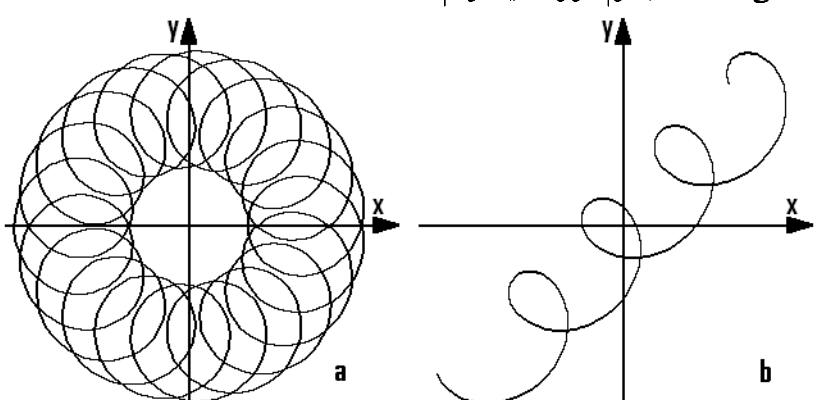
در شکل ۱۹.۷ زیر منحنی های بزیر

$$(a) \quad \begin{cases} x(t) = ۲\cos t - \cos ۲۰t \\ y(t) = ۲\sin t - \sin ۲۰t \end{cases} \quad , \quad ۰ \le t \le ۲\pi$$

و

$$(b) \quad \begin{cases} x(t) = t - ۲\cos ۲t \\ y(t) = t - ۲\sin ۲t \end{cases} \quad , \quad -۲\pi \le t \le ۲\pi$$

را ملاحظه می نمائید که با نرم افزار **متمتیکا** رسم شده اند.



شکل ۱۹.۷ دو منحنی پارامتری بزیر

منحنی های بزیر همچنین در تعیین اشکال و حروف و دیگر نمادها در برخی پرینترهای لیزری نیز بکار می روند. در نرم افزار $Paint$ ویندوز از روش بزیر برای رسم منحنی ها استفاده می‌شود.

تمرین ۷.۷ تکمیلی.

۱) با استفاده از نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ (شکل۹.۷) و نیمساز ناحیه اول و سوم نمودارهای زیر را رسم کنید.

$$y = x + \frac{1}{x} \quad , \quad y = |x| + \frac{1}{|x|} \quad , \quad y = x + 1 - \frac{1}{x-2} \quad , \quad y = -x + \frac{1}{x}$$

۲) با استفاده از نمودار $y = \ln x$ (شکل۱۳.۵) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y = \ln|x| \quad , \quad y = |\ln x| \quad , \quad y = \ln|x+1| \quad , \quad y = 2\ln x + 1 \quad , \quad y = \big|\ln|x|\big|$$

۳) اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $g(x) = 4\sqrt{2x-3}$ مقادیر gof و D_{gof} را حساب کنید.

۴) اگر $f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{1-x}}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ مقادیر fog و D_{fog} را حساب کنید.

۵) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin x$ مقادیر fog، D_{fog}، gog و D_{gog} را حساب کنید.

۶) اگر

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 1 \\ 1 - x^2 & , x < 1 \end{cases}$$

و

$$g(x) = \begin{cases} -x & , x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}$$

مطلوبست محاسبهٔ توابع gof و fog.

۷) می دانیم در حالت کلی $fog(x) \neq gof(x)$.

الف) دو تابع f و g مثال بزنید که $fog(x) \neq gof(x)$.

ب) دو تابع f و g مثال بزنید که $fog(x) = gof(x)$.

۸) اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ مطلوبست مقادیر $fff(4)$، $ffff(4)$ و $ffff(x)$.

۹) اگر $f(x) = \frac{x}{x+1}$ مقادیر $fff(1)$ و $ffff(1)$ چیست.

۱۰) با استفاده از ترکیب توابع، ضابطهٔ توابع زیر را ساده کرده و نمودار آنها را رسم نمائید.

$$f(x) = sgn(u(x)) \quad , \quad g(x) = u(sgn(x)) \quad , \quad h(x) = u(sgn(x) + x)$$

$$i(x) = u(|sgn(x)|) \quad , \quad j(x) = xsgn(x^2 - 1) \; , \quad k(x) = sgn(x+1) + sgn(x-1)$$

۱۱) نشان دهید $f(x) = x^۳ - ۱$ تابعی صعودی است.

۱۲) صعودی و یا نزولی بودن توابع زیر را مشخص نمائید.

$$y = ۱ - |x| \quad , \quad y = \ln x + ۴ \quad , \quad y = \arcsin x \quad , \quad y = \frac{\sqrt{x} - ۱}{\sqrt{x}} \quad , \quad y = \frac{۱}{x^۳}$$

۱۳) بازه هائی را بیابید که تابع $y = x^۲ - ۵x + ٦$ بر آنها صعودی یا نزولی است.

۱۴) تابع لگاریتم تابعی است زوج یا فرد؟ صعودی است یا نزولی.

۱۵) زوج و فرد بودن توابع زیر را تعیین کنید.

$$\begin{array}{lll} f(x) = ۲|x| + ۳ & , \quad g(x) = \big||x| - ۱\big| & , \quad h(x) = x^۲ - ۳ \\ i(x) = sgn(x) & , \quad j(x) = x^۴ + x + ۱ & , \quad k(x) = \dfrac{x^۲ + ۱}{x^۲ - ۱} \\ l(x) = u(x) - u(-x) & , \quad m(x) = ۳\sqrt{|x| + ۱} & , \quad n(x) = x|x| - \sqrt[۳]{x} \end{array}$$

۱٦) دوره تناوب توابع زیر را مشخص نمائید.

$$y = \sin ۴x \quad , \quad y = \cos ۳x \quad , \quad y = ۲x - [۲x] \quad , \quad y = |\sin x| \quad , \quad y = \Big[|\sin x|\Big]$$

۱۷) کران توابع زیر را تعیین کنید.

$$y = ۳\sin x + ۱ \quad , \quad y = \cos^۲ x \quad , \quad y = x^۲ - ۲x - ۳ \quad , \quad y = ۱ - |x| \quad , \quad y = \sqrt{\sin x}$$

۱۸) قرینهٔ نقطهٔ $A(۳, ۵)$ نسبت به نقطهٔ $M(۴, -۲)$ چیست؟

۱۹) قرینهٔ تابع $y = ۳x^۳ - ۵x + ۲$ را نسبت به نقطهٔ $(-۱, ۲)$ بیابید.

۲۰) مرکز تقارن تابع $y = x^۳ - ۲۷x + ۳$ را پیدا کنید.

۲۱) قرینه تابع $y = \sin x + x\cos x$ را نسبت به مبداء مختصات بیابید.

۲۲) نشان دهید نقطه (α, β) مرکز تقارن مربع $|x - \alpha| + |y - \beta| = k$ است $(k > ۰)$.

۲۳) نشان دهید نقطه $(\frac{b}{a}, \frac{d}{c})$ مرکز تقارن مربع $|ax - b| + |cx - d| = k$ است $(k > ۰)$.

۲۴) نشان دهید مبداء مختصات مرکز تقارن نمودار $|y| = |x| + |x + a| + |x - a|$ است.

۲۵) مقادیر a و b و c را چنان بیابید که نمودار $y = \sqrt[۳]{x^۳ + ax^۲ + bx + c}$ نسبت به مبداء مختصات متقارن باشد.

۲٦) بررسی کنید که آیا توابع $f(x) = x^۳ + ۲$ و $g(x) = x^۲ - ۱$ یک به یک هستند یا نه.

۲۷) وارون توابع زیر را در فاصله‌ای که یک به یک هستند بدست آورید.

$$(a)\quad y=\frac{2-x}{2x+3}\quad,\quad (b)\quad y=\sqrt{2x^2-1}+7\quad,\quad (c)\quad y=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

$$(d)\quad y=x^2+4x-1\quad,\quad (e)\quad y=3\ln x+5\quad,\quad (f)\quad y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

۲۸) ثابت کنید:

$$(a)\quad \arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\quad,(b)\quad \arctan x+arccot\ x=\frac{\pi}{2}$$

$$(c)\quad \arctan 2+\arctan 3=\frac{3\pi}{4}\quad,(d)\quad 2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\quad (x>1)$$

$$(e)\quad \arcsin\frac{5}{13}+2\arctan\frac{2}{3}=\frac{\pi}{2}\ ,(f)\quad \sin(\frac{1}{2}\arcsin x)=\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$$

۲۹) اگر $f(x)=\dfrac{4-x}{2x-4}$ ثابت کنید که $f(3+x)f(3-x)$ مقداری است ثابت.

۳۰) اگر $f(\dfrac{x-1}{x})+f(x)=x$ باشد، مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$.

۳۱) اگر $f(x-1)+2f(1-x)=x-1$ باشد، تابع $f(x)$ را بیابید.

۳۲) سهمی $y=f(x)$ را چنان بیابید که $f(x+1)-f(x)=2x+3$ بوده و نمودار سهمی از مبداء مختصات بگذرد.

۳۳) اگر $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ نشان دهید $f(x^3)+3f(x)=\big(f(x)\big)^3$.

۳۴) اگر $x=\arcsin(\sqrt{3}\cos x)$ و انتهای کمان در ربع سوم باشد مطلوبست نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ x.

۳۵) معادلات زیر را حل نمائید.

$$(a)\quad \log_{\cos x}^{\sin x}+\log_{\sin x}^{\cos x}=2\quad,\quad (b)\quad (x-4)^4+(x-5)^4=1$$

$$(c)\quad \arcsin x=\arccos 2x\quad,\quad (d)\quad \arcsin x+\arcsin 2x=\frac{\pi}{3}$$

۳۶) دستگاههای زیر را حل کنید.

$$(a)\quad \begin{cases} |y-1|-x=5, \\ |x-5|+|y-1|=1. \end{cases}\quad,\quad (b)\quad \begin{cases} 2x-|y|-7=0, \\ 3|x|+5y+9=0. \end{cases}$$

$$(c)\quad \begin{cases} \log_2^x-\log_4^y=3, \\ \log_4^x-\log_8^y=1. \end{cases}\quad,\quad (d)\quad \begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy}, \\ x+y=20. \end{cases}$$

$$(e)\quad \begin{cases} \ln x-\ln y=1 \\ 2x-y=2e-1 \end{cases}.\quad,\quad (f)\quad \begin{cases} \ln x-\ln y=2 \\ 4x-y=2e-1 \end{cases}.$$

۳۷) معادلهٔ $(6a-2)x^2-(a+3)x+a=0$ بازای چه a یی ریشه مضاعف دارد؟

۳۸) توابع زیر را بشکل معادلات پارامتری (با پارامتر t) بنویسید.

$$(a)\quad \sqrt{y}=\sqrt{x}-1 \quad , \quad (b)\quad y=\sqrt[4]{x+1}+1 \quad , \quad (c)\quad x^2+9y^2=9$$

$$(d)\quad y=\sqrt{\ln x} \quad , \quad (e)\quad y=e^{\sqrt{x+2}} \quad , \quad (f)\quad x^2+y^2=16$$

$$(g)\quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy} \quad , \quad (h)\quad y=2\ln(x-1) \quad , \quad (i)\quad y=\sin(\arcsin x)$$

۳۹) در معادلات پارامتری زیر با حذف پارامتر t، معادلهٔ منحنی حاصل را بیابید. سعی کنید شکل حاصل را نیز رسم کنید.

$$(a)\quad f(t)=(2t,\sqrt{t})\ ;\ 0\le t\le 1 \qquad (b)\quad f(t)=(\cos t,\sin t)\ ;\ 0\le t\le 2\pi$$

$$(c)\quad f(t)=(t^2,t^2)\ ;\ 0\le t\le 1 \qquad (d)\quad f(t)=(2\sin t,\cos t)\ ;\ -\pi\le t\le \pi$$

$$(e)\quad f(t)=(\sin t, 2\cos^2 t)\ ;\ 0\le t\le \pi$$

$$(f)\quad f(t)=(3\sin t, 4\cos t)\ ;\ 0\le t\le 2\pi$$

$$(g)\quad \begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\cos t \end{cases} ;\ 0\le t<\frac{\pi}{2} \qquad (h)\quad \begin{cases} x=1+2\sin t \\ y=2-2\cos t \end{cases} ;\ 0\le t<\frac{\pi}{2}$$

$$(i)\quad \begin{cases} x=3^t+3^{-t} \\ y=3^t-3^{-t} \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R} \qquad (j)\quad \begin{cases} x=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ y=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$$

۴۰) **(فیزیک)** توابع $x(t)=4t^2+1$ و $y(t)=4t$ معادلات پارامتری مسیر دو ذره در صفحهٔ مختصات هستند. موقعیت ذرات را در لحظات $t=1s,2s,3s$ پیدا کنید. این ذرات کی و کجا بهم برخورد می کنند؟

۴۱) **(فیزیک)** تابع $f(t)=(t+1,\sqrt{t+4})$ مسیر پارامتری یک ذره در صفحهٔ مختصات است. برای مسیر این ذره معادله ای صریح بنویسید. موقعیت این ذره را در زمانهای $t=0s$ و $t=5s$ پیدا کنید. سرعت متوسط این ذره را طی این پنج ثانیه محاسبه نمائید.

۴۲) **(معماری)** برخی چاپگرهای لیزری با استفاده از منحنی های بزییر کاراکترهای دارای انحنا مانند حرف C را روی صفحه خروجی ایجاد می کنند. با اینکار حتی قادر به ایجاد اشکال پیچیده تری نیز خواهند بود. برای ایجاد کاراکتر C، با انتخاب مناسب چهار نقطه در صفحهٔ مختصات، منحنی بزییر درجه سهٔ حاصل را یافته و شکل مقبولی برای این کاراکتر بیابید. شکل منحنی بدست آمده را رسم کرده و نیز با رسم نقاط در نرم افزار $Paint$ ویندوز و رسم منحنی روی آنها، نتیجهٔ خود را با این نرم افزار مقایسه نمائید.

فصل ۸

حد و پیوستگی

در فصول قبل درباره توابع مختلف چیزهائی آموختیم و دربارهٔ نمودار توابع و خواصی چند از آنها صحبت کردیم. اما **رفتار یک تابع** تا حدودی پیچیده تر از نمایش چند نمودار ساده است و نباید سطحی از آن گذشت. در این فصل دربارهٔ رفتار توابع بیشتر خواهیم دانست و در حقیقت این فصل آغازی برای بررسی **رفتار** توابع مختلف روی محور حقیقی است.

۱.۸ مفهوم حد

مفهوم حد مترادف نزدیک کردن نقاط به یک نقطهٔ مشخص و بررسی رفتار تابع طی این نزدیکی است. بدون نیاز به تعریف دقیق ریاضی، فرض کنید بخواهیم رفتار تابع مفروضی مانند $f(x) = ۲x + ۱$ وقتی x به $a = ۱$ نزدیک می شود را بررسی نمائیم. برای این کار، چند عدد را از همسایگی ۱ (یعنی نقاط کناری آن) انتخاب کرده و حاصل تابع را برای آنها بدست می‌آوریم. این نقاط کناری را از فاصلهٔ [۰/۶, ۱/۴] و بفاصلهٔ ۰/۱ انتخاب می کنیم:

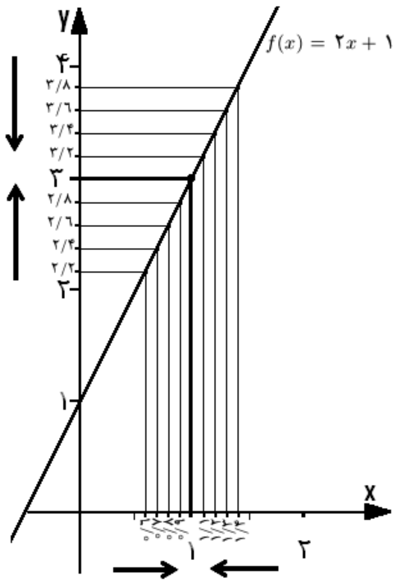
x انتخاب شده	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	$\boxed{۱}$	۱/۱	۱/۲	۱/۳	۱/۴
$f(x)$ بدست آمده	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	$\boxed{۳}$	۳/۲	۳/۴	۳/۶	۳/۸

نقاط حاصل از جدول نشان می دهند که وقتی x به یک نزدیک می شود مقدار $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک می گردد. در این حالت گوئیم وقتی x به سمت ۱ میل می کند، y به سمت ۳ میل خواهد کرد. این مفهوم از حد تابع، که حاصل قرار دادن نقاط دلخواهی از همسایگی نقطه در تابع است را در عمل بکار نگرفته و مستقیماً با جایگذاری عدد ۱ در تابع $f(x) = ۲x + ۱$

حد آنرا بدست می آوریم و می نویسیم[1]:

$$\lim_{x\to ۱} ۲x+۱ = ۳$$

با رسم نقاط جدول در صفحه مختصات دکارتی، شکل۱.۸ حاصل می شود.



شکل ۱.۸ حد تابع $y = ۲x + ۱$ در نزدیکی یک

مثال ۱.۸ مثال های مختلف از حد چند تابع بصورت زیر است:

$$\lim_{x\to ۱/۷} ۵[x] + ۲ = ۵(۱) + ۲ = ۷$$

$$\lim_{x\to \pi} \sin x - ۱ = ۰ - ۱ = -۱$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۲x+۱}{۵x+۱} = \frac{۲(۱)+۱}{۵(۱)+۱} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۲x - \sin ۲x}{\cos x + ۲} = \frac{۰ - ۰}{-۱ + ۲} = ۰$$

$$\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x} + ۱}{۵ - \sqrt{x+۵}} = \frac{۳}{۲}$$

[1] – تعریف ریاضی آن چنین بیان می شود: گوئیم $\lim_{x\to a} f(x) = l$ اگر

$$\forall \varepsilon > ۰,\ \exists \delta > ۰,\ s.t.\ |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

بعبارتی نقاطی از همسایگی a چنان انتخاب می کنیم که فاصلهٔ آنها از عدد مفروضی مانند δ کمتر شود و با انتخاب این نقاط، مقدار عرض آنها از نقطهٔ l روی محور عرضها کمتر از عددی مفروض مانند ε خواهد شود. طبق این تعریف برای هر انتخابی مانند ε انتخابی مانند δ وجود دارد.

در حالت کلی وقتی حد تابع وجود دارد یعنی وقتی x به سمت a میل کرده، $f(x)$ به سمت l میل کند می نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

اگر حد یک تابع را برای همسایگی های چپ و راست تابع بطور مجزا بدست آوریم، به آنها **حد چپ** $x \to a^-$ و **حد راست** $x \to a^+$ اطلاق می کنیم. حد یک تابع وقتی وجود دارد که حد چپ و حد راست با هم برابر باشند، یعنی

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

می خواهیم حد تابع $\begin{cases} x+۱\ , & x \geq ۲, \\ ۵-x\ , & x < ۲. \end{cases}$ را وقتی x به سمت ۲ میل می کند، بیابیم. در این تابع چون نقاط همسایگی تعریف شده برای نقطهٔ $x = ۲$ از دو ضابطه متفاوت است لذا بایستی یکبار از سمت راست به ۲ نزدیک شد $x \to ۲^+$ و یکبار از سمت چپ $x \to ۲^-$. بنابراین حدود تابع چنین بدست می آید:

$$\begin{aligned} (x \geq ۲ \text{ برای}) \text{ حد راست} \quad \lim_{x\to ۲^+} f(x) &= \lim_{x\to ۲^+} x+۱ = ۲+۱ = ۳ \\ (x < ۲ \text{ برای}) \text{ حد چپ} \quad \lim_{x\to ۲^-} f(x) &= \lim_{x\to ۲^-} ۵-x = ۵-۲ = ۳ \\ \lim_{x\to ۲} f(x) &= ۳ \text{ حد تابع عبارتست از} \end{aligned}$$

مثال ۲.۸ حد تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ را وقتی x به سمت ۰ میل می کند بیابید.

حل. مانند مثال قبل دو حالت در نظر می گیریم و حدود چپ و راست را بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} (x \geq ۰ \text{ برای}) \text{ حد راست} \quad \lim_{x\to ۰^+} f(x) &= \lim_{x\to ۰^+} \frac{x}{x} = ۱ \\ (x < ۰ \text{ برای}) \text{ حد چپ} \quad \lim_{x\to ۰^-} f(x) &= \lim_{x\to ۰^-} \frac{-x}{x} = -۱ \end{aligned}$$

و حد تابع در $x = ۰$ وجود ندارد.

مثال ۳.۸ حد تابع $f(x) = \frac{[x]-۵}{[x^۲-۱]-۱}$ را وقتی x به سمت ۱ میل می کند بیابید.

$$\begin{aligned} (x > ۱ \text{ برای}) \text{ حد راست} \quad \lim_{x\to ۱^+} f(x) &= \lim_{x\to ۱^+} \frac{[x]-۵}{[x^۲-۱]-۱} = \frac{۱-۵}{۰-۱} = ۴ \\ (x < ۱ \text{ برای}) \text{ حد چپ} \quad \lim_{x\to ۱^-} f(x) &= \lim_{x\to ۱^-} \frac{[x]-۵}{[x^۲-۱]-۱} = \frac{۰-۵}{-۱-۱} = \frac{۵}{۲} \end{aligned}$$

پس حد تابع در $x = ۱$ وجود ندارد.

۱.۱.۸ صور مبهم و قوانین گرفتن حدود

علاوه بر مثالهای ساده‌ای مانند۱.۸ که برای گرفتن حد $x \to a$ مقدار a را در تابع قرار می دادیم، مسائل دیگری نیز وجود دارد. به حدود زیر را توجه کنید:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{x^۲-۴} = \frac{۲-۲}{۴-۴} = \frac{۰}{۰} \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^۲-۴} - x = \infty - \infty$$

می بینید که با جایگذاری مقدار متغیر، مقادیر حدود بدست نمی آید. در این چنین مواردی، که مقدار حد برابر $\frac{۰}{۰}$ یا $\infty - \infty$ است، **حد مبهم** بوده و برای بدست آوردن آن قواعدی را بکار می‌بریم که در ذیل بیان خواهیم نمود. موارد مبهم که **صور مبهم** نامیده می شوند عبارتند از $\frac{\infty}{\infty}$، $۰ \times \infty$، $\infty - \infty$ و $\frac{۰}{۰}$.

۲.۱.۸ استفاده از اتحادها برای رفع ابهام

با بکاربردن اتحادها و تجزیهٔ صورت و مخرج و در برخی موارد با ضرب صورت و مخرج در مزدوجها براحتی حدود رفع ابهام می شوند. به چند مثال توجه کنید:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{x^۲-۴} = \frac{۰}{۰} = \lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{(x-۲)(x+۲)} = \lim_{x\to ۲} \frac{۱}{x+۲} = \frac{۱}{۴}$$
$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^۳-۱}{x^۲-۱} = \frac{۰}{۰} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{(x-۱)(x+۱)} = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲+x+۱}{x+۱} = \frac{۳}{۲}$$
$$\lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)^۲}{x-۲} = \frac{۰}{۰} = \lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{۱} = \frac{۰}{۱} = ۰$$
$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-۵x+۶}{x^۲+۳x-۱۰} = \frac{۰}{۰} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x-۳)}{(x-۲)(x+۵)} = \lim_{x\to ۲} \frac{x-۳}{x+۵} = \frac{-۱}{۷}$$

در حالت خاص اگر تابع کسری با صورت و مخرج چند جمله‌ای باشد، وقتی که $x \to a$ کافیست با تقسیم هر کدام از صورت و مخرج بر عامل ابهام $x-a$، آنها را تجزیه کنیم.

مثال ۴.۸ مطلوبست محاسبهٔ حد زیر

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۴-۸x^۲-۹}{x^۳-۴x^۲+۵x-۶}$$

حل. از آنجا که

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۴-۸x^۲-۹}{x^۳-۴x^۲+۵x-۶} = \frac{۸۱-۷۲-۹}{۲۷-۳۶+۱۵-۶} = \frac{۰}{۰}$$

این حد نیز مبهم بوده و برای رفع ابهام از آن، صورت و مخرج را جداگانه بر عامل ابهام $x-۳$ تقسیم می کنیم. داریم:

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۴-۸x^۲-۹}{x^۳-۴x^۲+۵x-۶} = \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x^۳+۳x^۲+x+۳)}{(x-۳)(x^۲-x+۲)} = \frac{۶۰}{۸}$$

مطلب ۱.۸ در محاسبهٔ برخی حدود می توان از اتحاد زیر بهره برد:

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-۱} + x^{n-۲}a + x^{n-۳}a^۲ + \cdots + x^۲a^{n-۳} + xa^{n-۲} + a^{n-۱})$$

مثال ۵.۸ مطلوبست حد $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{x^۴ - ۸۱}{x^۳ - ۲۷}$

حل. با استفاده از اتحاد بالا داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to ۳} \frac{x^۴ - ۸۱}{x^۳ - ۲۷} &= \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x^۳ + x^۲۳ + x۳^۲ + ۳^۳)}{(x-۳)(x^۲ + x۳ + ۳^۲)} \\
&= \lim_{x\to ۳} \frac{x^۳ + ۳x^۲ + ۹x + ۲۷}{x^۲ + ۳x + ۹} \\
&= ۴
\end{aligned}$$

هرچند روشهای مذکور فوق غالباً سرراستند، ولی در محاسبهٔ حدود رادیکالی در برخی موارد باید با ضرب صورت و مخرج در مزدوج عبارت، حد را محاسبه نمود. برای حدودی که صورت یا مخرج آنها رادیکالی هستند، به مثال های زیر توجه کنید:

مثال ۶.۸ محاسبهٔ حد $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{\sqrt{x+۲} - ۲}{x-۲}$.

حل.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt{x+۲} - ۲}{x-۲} &= \lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt{x+۲} - ۲}{x-۲} \times \frac{\sqrt{x+۲} + ۲}{\sqrt{x+۲} + ۲} \\
&= \lim_{x\to ۲} \frac{(x+۲) - ۴}{(x-۲)(\sqrt{x+۲} + ۲)} \\
&= \lim_{x\to ۲} \frac{۱}{\sqrt{x+۲} + ۲} \\
&= \frac{۱}{۴}
\end{aligned}$$

مثال ۷.۸ حد زیر را محاسبه نمائید.

$$\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{۲x+۱} - \sqrt{x} - ۱}{x-۴}$$

حل. جملات صورت را دسته بندی و در مزدوج آن ضرب می کنیم:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{۲x+۱} - \sqrt{x} - ۱}{x-۴} &= \lim_{x\to ۴} \frac{(\sqrt{۲x+۱} - \sqrt{x}) - ۱}{x-۴} \times \frac{(\sqrt{۲x+۱} - \sqrt{x}) + ۱}{(\sqrt{۲x+۱} - \sqrt{x}) + ۱} \\
&= \lim_{x\to ۴} \frac{(\sqrt{۲x+۱} - \sqrt{x})^۲ - ۱}{(x-۴)(\sqrt{۲x+۱} - \sqrt{x} + ۱)} \\
&= \lim_{x\to ۴} \frac{۲x + ۱ + x - ۲\sqrt{x(۲x+۱)} - ۱}{(x-۴)(\sqrt{۲x+۱} - \sqrt{x} + ۱)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 4} \frac{3x-2\sqrt{2x^2+x}}{(x-4)(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}+1)}\\
&= \lim_{x\to 4} \frac{3x-2\sqrt{2x^2+x}}{(x-4)(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}+1)} \times \frac{3x+2\sqrt{2x^2+x}}{3x+2\sqrt{2x^2+x}}\\
&= \lim_{x\to 4} \frac{9x^2-4(2x^2+x)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}+1)(3x+2\sqrt{2x^2+x})}\\
&= \lim_{x\to 4} \frac{x(x-4)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}+1)(3x+2\sqrt{2x^2+x})}\\
&= \frac{4}{2\times 24}\\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که حد یک تابع همیشه یکتاست و از هر روشی که حد را بدست آوریم، جواب نهائی یکی خواهد بود.

تمرین ۱.۸ حدود زیر را محاسبه کنید.

$(a)\ \displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{-2[x]+6}{x-1}$, $(b)\ \displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{[x]+3}{1-[x]}$

$(c)\ \displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \sin x$, $(d)\ \displaystyle\lim_{x\to -2^-} \frac{2x}{-x}$

$(e)\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{x^2-1}$, $(f)\ \displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^3+8}$

$(g)\ \displaystyle\lim_{x\to 2} \sqrt{\frac{x-2}{x^2-4}}$, $(h)\ \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$

$(i)\ \displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x-4}{x^3-x^2-x-2}$, $(j)\ \displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3-x^2+x+14}{x^4+3x^3+8}$

$(k)\ \displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{[x^2]-1}{[x]^2-1}$, $(l)\ \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

$(m)\ \displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^6-64}{x^4-16}$, $(n)\ \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{10}-1}{x^8-1}$

$(o)\ \displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{3x^2-8x-16}{2x^2-9x+4}$, $(p)\ \displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$

$(q)\ \displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{2x^3+x+3}{x^3+2x^2+6x+5}$, $(r)\ \displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^5-x^4-4x^2-x+2}{x^4-2x^3+x^2-4}$

$(s)\ \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-1}$, $(t)\ \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{10}-2x+1}$

۳.۱.۸ حد در بینهایت $x \to \infty$

حد در بی‌نهایت با نماد $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ یا $x \to \infty$ مشخص می شود. این مفهوم از حد، کمی متفاوت از حدود قبلی است، در اینجا چون متغیر عددی است بزرگ، بنابراین اعداد در مقایسه با آنها ناچیز شمرده شده و قابل صرفنظر خواهند بود. برای مثال اگر بخواهیم حد $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^۲+۱} - x$ را حساب کنیم. از آنجا که عدد ۱ در برابر متغیر $x^۲$ ناچیز است، پس قابل صرفنظر خواهد بود و می توانیم بجای $x^۲ + ۱$ عبارت $x^۲$ را قرار داده و بنویسیم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^۲+۱} - x &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^۲} - x\\ &= \lim_{x\to+\infty} |x| - x\\ &= ۰\end{aligned}$$

در حالت $x \to -\infty$ چنین باید نوشت:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^۲+۱} - x &= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^۲} - x\\ &= \lim_{x\to-\infty} |x| - x\\ &= \lim_{x\to-\infty} -x - x\\ &= \lim_{x\to-\infty} -۲x\\ &= +\infty\end{aligned}$$

مثال ۸.۸ مقدار حد $\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^۲+۴} - x - ۱$ را حساب کنید.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^۲+۴} - x - ۱ &= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^۲} - x - ۱\\ &= \lim_{x\to\pm\infty} |x| - x - ۱\\ \text{اعداد مثبت} &= \lim_{x\to+\infty} x - x - ۱ = -۱\\ \text{اعداد منفی} &= \lim_{x\to-\infty} -x - x - ۱ = \lim_{x\to-\infty} -۲x - ۱ = +\infty\end{aligned}$$

مثال ۹.۸ مطلوبست حد $\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^۲ + ۴x - ۳} + x$

حل. در اینجا زیر رادیکال را **مربع کامل** می کنیم. برای این کار می توانید از اتحاد زیر استفاده کنید:

$$ax^۲ + bx + c = a(x + \frac{b}{۲a})^۲ + \frac{۴ac - b^۲}{۴a}$$

و هنگامی که $x \to \pm\infty$ همیشه داریم:

$$\sqrt{ax^۲ + bx + c} = \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{۲a}\right|$$

اکنون جایگذاری می کنیم:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^۲+۴x-۳}+x &= \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{۱}\left|x+\frac{۴}{۲(۱)}\right|+x\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}|x+۲|+x\\
\text{برای}+\infty &= \lim_{x\to+\infty}x+۲+x=\lim_{x\to+\infty}۲x+۲=+\infty\\
\text{برای}-\infty &= \lim_{x\to-\infty}-(x+۲)+x=-۲
\end{aligned}$$

مطلب ۲.۸ برای فرجه های بیشتر از دو وقتی $x\to\pm\infty$ فرمول زیر را بکار می بریم.

$$\sqrt[n]{ax^n\pm bx^{n-۱}+cx^{n-۲}+\cdots}=\sqrt[n]{a}\left|x\pm\frac{b}{na}\right|$$

برای حدودی که صورت و مخرج آنها چندجمله ای هستند، به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱۰.۸ مطلوبست حد زیر

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^۳-۲x+۱}{۴x^۴-۹x^۳+۸}$$

حل. با فاکتورگیری از بزرگترین توان صورت و مخرج چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^۳-۲x+۱}{۴x^۴-۹x^۳+۸} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۳(۳-\frac{۲}{x^۲}+\frac{۱}{x^۳})}{x^۴(۴-\frac{۹}{x}+\frac{۸}{x^۴})}\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^۳}{۴x^۴}\\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳}{۴x}\\
&= \frac{۳}{۴(\pm\infty)}\\
&= ۰
\end{aligned}$$

واضح است که در این نوع حدود، همیشه بزرگترین توان اعمال می شود.

مطلب ۳.۸ در حالت کلی برای حدود با صورت و مخرج چندجمله‌ای، با در نظر گرفتن بزرگترین درجهٔ صورت و مخرج داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\ldots+a_۰}{b_mx^m+b_{m-۱}x^{m-۱}+\ldots+b_۰} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\\
n>m\,\text{برای} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^{n-m}}{b_m}=(\pm)\infty\\
n=m\,\text{برای} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n}{b_m}=\frac{a_n}{b_m}\\
n<m\,\text{برای} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n}{b_mx^{m-n}}=۰
\end{aligned}$$

برای بعضی حدود خاص، با جانشینی متغیر $\frac{۱}{t}$ بجای x که در آن $t \to ۰$ می توان حدود بی‌نهایت را ساده تر نمود. علاوه بر این تغییر متغیرهای خاصی نیز در بین حدود دیده می شود. در مثال ۲۶.۹ ثابت خواهیم کرد که

$$\lim_{t\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{t}\right)^{t}=e$$

که در آنها e عدد نپر می باشد. با استفاده از این فرمول برخی از حدود (که دارای توان تابعند) را می توان محاسبه نمود.

مثال ۱۱.۸ حد زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right)^{۲x-۳}$$

حل. از آنجا که شکل حد بایستی بصورت بالا دربیاید، لذا با فرض

$$\frac{x+۱}{x-۱}=۱+\frac{۱}{t}$$

بدست می آید $x=۲t+۱$ که با جایگذاری در عبارت حدی داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right)^{۲x-۳} &= \lim_{t\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{t}\right)^{۲(۲t+۱)-۳}\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{t}\right)^{۴t}\lim_{t\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{t}\right)^{-۱}\\ &= e^{۴}.۱\\ &= e^{۴}\end{aligned}$$

تمرین ۲.۸ حدود زیر را محاسبه کنید.

$$(a)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sqrt{x^{۲}-x+۲}}\quad,\quad (b)\quad \lim_{x\to\pm\infty} x-۲+\sqrt{x^{۲}-۸x+۴}$$

$$(c)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}-۵x+۱}{\sqrt{x^{۴}}+۸}\quad,\quad (d)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^{۲}-۹x}-\sqrt{x^{۲}+۹x}$$

$$(e)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^{۲}+۱}-x}{\sqrt{x^{۲}-۱}-x}\quad,\quad (f)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^{۲}-۸x+۱}-\sqrt{x^{۲}+۸x-۱}$$

$$(g)\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{۱-x}}{۲x+\sqrt{۲}}\quad,\quad (h)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[۴]{۱۶x^{۴}-۸x^{۳}+x-۱}+۳-۲x$$

$$(i)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}+x+۱}{x^{۲}-x-۱}\quad,\quad (j)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۴x^{۳}-x+۲}{۵x^{۲}-۹x+۷}$$

$$(k)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{۱۶x^{۲}}+۱}{-۳x+۲}\quad,\quad (l)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۹}+x^{۶}+x^{۳}+۱}{۱-x-x^{۷}-x^{۹}}$$

$$(m)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+۵}{x+۲}\right)^{۴x+۳}\quad,\quad (n)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{۵x+۱}{۵x-۳}\right)^{۲x-۱}$$

۴.۱.۸ حدود توابع مثلثاتی

برای حدود توابع مثلثاتی، وقتی $x \to 0$ از دو حد زیر بهره می گیریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

در اکثر موارد وقتی $x \to 0$ می توان از هم ارزی های زیر نیز استفاده کرد:

$$\sin ax \equiv ax \qquad , \qquad \cos ax \equiv 1 - \frac{a^2x^2}{2} \qquad , \qquad \tan\ ax \equiv ax$$

مثال ۱۲.۸ مطلوبست حد $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 2x}{\tan 2x + x}$

حل. مطابق قوانین هم ارزی بالا می نویسیم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 2x}{\tan 2x + x} = \lim_{x\to 0} \frac{(3x) - 2x}{(2x) + x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

البته قوانین مثلثاتی را برای ساده کردن عبارات حدی نیز بکار می بریم که نمونه های آن در مثال های زیر می آید:

مثال ۱۳.۸ مطلوبست حد $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$

حل. با توجه به اتحادهای مثلثاتی می نویسیم:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} (1 + \cos x) \\
&= 2
\end{aligned}$$

مثال ۱۴.۸ حد $\lim_{x\to 0} \sin x(\tan x + \cot x)$ را بدست آورید.

حل. طبق مثال۹.۶ عبارت حدی ساده شده و مقدار حد برابرست با

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

مثال ۱۵.۸ مطلوبست مقدار حد $\lim_{x\to 1} (1 - x) \tan(\frac{\pi x}{2})$

حل. از آنجا که $\tan \alpha = \cot(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ با جایگذاری در عبارت حدی می نویسیم:

$$\lim_{x\to 1} (1 - x) \cot(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}) = \lim_{x\to 1} (1 - x) \cot(\frac{\pi}{2}(1 - x))$$

با تغییر متغیر $t = ۱ - x$ از آنجاکه $x \to ۱$ پس $t \to ۰$ و بدین ترتیب

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۱}(۱-x)\cot(\frac{\pi}{۲}(۱-x)) &= \lim_{t\to ۰} t\ \cot(\frac{\pi}{۲}t)\\ &= \lim_{t\to ۰} t\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}t)}{\sin(\frac{\pi}{۲}t)}\\ &= \lim_{t\to ۰} t\frac{۱}{\frac{\pi}{۲}t}\\ &= \frac{۲}{\pi}\end{aligned}$$

تمرین ۳.۸ حدود مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

$$(a)\quad \lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۳x - x}{\sin ۴x - ۳x}\quad,\quad (b)\quad \lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{\sin x}\quad,\quad (c)\quad \lim_{x\to ۰}\frac{\tan^۳ ۲x}{x\sin^۲ ۴x}$$

$$(d)\quad \lim_{x\to ۰}\frac{x^۲\sin^۲ x}{۱-\cos ۲x}\quad,\quad (e)\quad \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin x}{\frac{\pi}{۲}-x}\quad,\quad (f)\quad \lim_{x\to ۰}\frac{۲x^۲-۳x}{۳\sin^۲ x}$$

$$(g)\quad \lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos^۳ x}\quad,\quad (h)\quad \lim_{x\to \pi}\frac{\sin^۲ x}{۱+\cos^۳ x}\quad,\quad (i)\quad \lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۳ x}{\cos x - \cos^۲ x}$$

۲.۸ پیوستگی

پیوستگی یک تابع در نقطه‌ای مثل a به این صورت بیان می شود که می بایست حد چپ تابع با حد راست تابع در a برابر بوده و این مقدار برابر مقدار تابع در این نقطه باشد، یعنی:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

مثال ۱۶.۸ پیوستگی تابع $f(x) = \frac{x^۲-۱}{x-۱}$ در نقطه $x = ۱$ را بررسی کنید.

حل. برای حد چپ و راست تابع در $x = ۱$ داریم:

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x-۱} = ۲$$

اما $f(۱)$ وجود ندارد. بنابراین تابع در $x = ۱$ پیوسته نیست.

مثال ۱۷.۸ پیوستگی تابع $f(x) = ۳x + |x-۳|$ را در $x = ۳$ بررسی کنید.

حل. در نقطهٔ $x = ۳$ حد چپ و حد راست تابع عبارتست از

$$\begin{aligned} \lim_{x\to ۳^+} f(x) &= \lim_{x\to ۳^+} ۳x + (x-۳) = ۹ && \text{حد راست برای} ۳ \; x \geq ۳ \\ \lim_{x\to ۳^-} f(x) &= \lim_{x\to ۳^-} ۳x - (x-۳) = ۹ && \text{حد چپ برای} ۳ \; x < ۳ \end{aligned}$$

و با توجه به اینکه $f(۳) = ۹$ لذا تابع در $x = ۳$ پیوسته است.

مثال ۱۸.۸ مقدار a را چنان بیابید که تابع زیر در $x = ۲$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۴}{x - ۲} & ,x > ۲ \text{ اگر} \\ a + ۲x & ,x \leq ۲ \text{ اگر} \end{cases}$$

حل.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to ۲^+} f(x) &= \lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۲ - ۴}{x - ۲} = ۴ && \text{حد راست برای} ۲ \; x > ۲ \\ \lim_{x\to ۲^-} f(x) &= \lim_{x\to ۲^-} a + ۲x = a + ۴ && \text{حد چپ برای} ۲ \; x \leq ۲ \end{aligned}$$

برای پیوسته بودن تابع در $x = ۲$ می بایست شرط پیوستگی برقرار باشد یعنی

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a^+} f(x) &= \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \\ ۴ &= a + ۴ = a + ۴ \\ a &= ۰ \end{aligned}$$

برای ترکیب توابع می توان گفت:

مطلب ۴.۸ اگر تابع $f(x)$ در b پیوسته بوده و $\lim_{x\to a} g(x) = b$ سپس $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$ و بعبارتی $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$.

تمرین ۴.۸ .

۱) مطلوبست تعیین پیوستگی تابع زیر در $x = ۴$ و سپس نمودار تابع را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱۰ & , \; x > ۴ \text{ اگر} \\ ٦ & , \; x = ۴ \text{ اگر} \\ ۱۰ - ۲x^۳ & , \; x < ۴ \text{ اگر} \end{cases}$$

۲) مقادیر a و b را بیابید چنانکه تابع زیر در $x = -۱$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x + a & , \; x > -۱ \text{ اگر} \\ bx + ۲ & , \; x = -۱ \text{ اگر} \\ ax + b & , \; x < -۱ \text{ اگر} \end{cases}$$

۳) با توجه به مطلب۴.۸ ناحیهٔ پیوستگی تابع $y = \ln(\sin x + ۱)$ را مشخص نمائید.

۱.۲.۸ قضیهٔ مقدار میانی

اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a) \neq f(b)$ آنگاه بازای هر عدد k بین $f(a)$ و $f(b)$ عددی مانند $c \in [a,b]$ هست که $f(c) = k$.

مثال ۱۹.۸ ثابت کنید تابع $f(x) = x^{۳} - ۳x + ۱$ یک ریشه بین ۲ و ۲− دارد.

حل. چون $f(۲) = ۳ > ۰$ و $f(-۲) = -۱ < ۰$ طبق قضیهٔ مقدار میانی عددی مانند c هست که $f(c) = ۰$.

۲.۲.۸ قضیهٔ فشردگی (ساندویچ)

اگر برای سه تابع پیوستهٔ $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ که $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ داشته باشیم

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$$

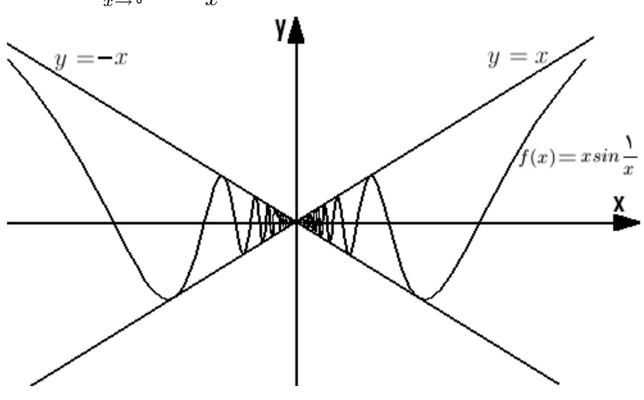
آنگاه $\lim_{x\to a} g(x) = l$.

مثال ۲۰.۸ ثابت کنید $\lim_{x\to ۰} x\sin\frac{۱}{x} = ۰$

حل. از آنجا که برای هر زاویهٔ α دلخواه $-۱ \leq \sin\alpha \leq ۱$ پس $-۱ \leq \sin\frac{۱}{x} \leq ۱$ با ضرب طرفین در x (چه مثبت و چه منفی) داریم $-|x| \leq x\sin\frac{۱}{x} \leq |x|$ و گرفتن حد از طرفین

$$\lim_{x\to ۰} -|x| \leq \lim_{x\to ۰} x\sin\frac{۱}{x} \leq \lim_{x\to ۰} |x|$$

و چون حد دو طرف صفر است، طبق قضیهٔ فشردگی $\lim_{x\to ۰} x\sin\frac{۱}{x} = ۰$ خواهد بود.



شکل ۲.۸ قضیه فشردگی وقتی است که یک تابع بین دو تابع دیگر قرار گیرد. در اینجا تابع $x\sin\frac{۱}{x}$ بین توابع $\pm x$ قرار گرفته است.

۳.۲.۸ مجانب افقی، قائم و مایل

مجانب یک منحنی، خطی است که در کنار منحنی قرار گرفته و منحنی در همسایگی آن به بی نهایت می رود. در حالت کلی سه نوع مجانب داریم:

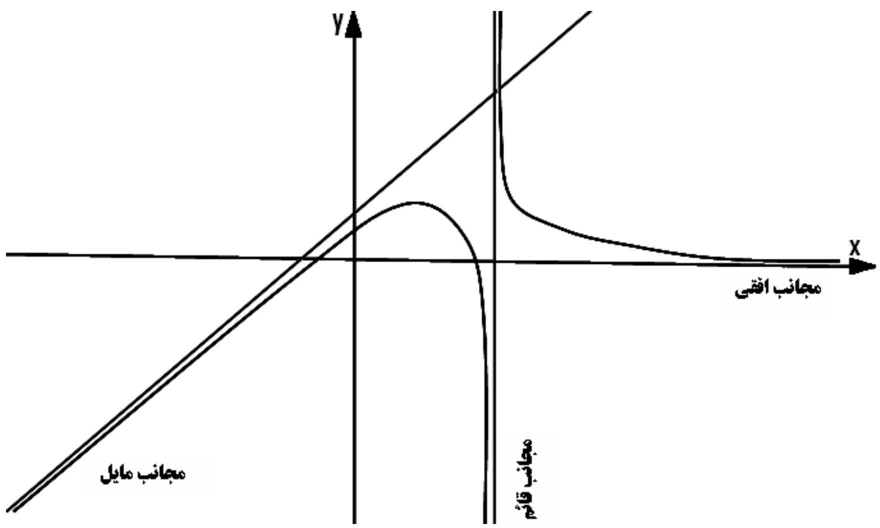
مجانب افقی: خط $y = b$ را مجانب افقی تابع $y = f(x)$ گوئیم اگر

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$$

مجانب قائم: خط $x = a$ را مجانب قائم تابع $y = f(x)$ گوئیم اگر

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

در اغلب موارد کافیست برای بدست آوردن مجانب قائم، مخرج را برابر صفر قرار دهیم.



شکل ۳.۸ مجانب های سه گانه در یک نمودار مفروض

مجانب مایل: خط $y = mx + h$ را مجانب مایل تابع $y = f(x)$ گوئیم اگر مقدار

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} \neq 0$$

موجود و مخالف صفر باشد. در اینصورت مقدار h را از فرمول زیر بدست می آوریم:

$$h = \lim_{x\to\pm\infty} \ y - mx$$

مثال ۲۱.۸ مجانبهای تابع زیر را بیابید.

$$y = \frac{3x - 1}{9 - x^2}$$

حل. با صفر قرار دادن مخرج برای مجانبهای قائم $9 - x^2 = 0$ پس $x = \pm 3$ و چون

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x - 1}{9 - x^2} = 0$$

بنابراین $y = 0$ مجانب افقی منحنی است. از آنجا که

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x - 1}{9x - x^3} = 0$$

لذا منحنی مجانب مایل ندارد.

مثال ۲۲.۸ مجانبهای تابع زیر را بدست آورید.

$$y = \frac{3x^2 - 1}{x - 4}$$

حل. با صفر قرار دادن مخرج مجانب قائم $x = 4$ بدست می‌آید و از آنجا که

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 - 1}{x - 4} = \pm\infty$$

پس تابع مجانب افقی ندارد. چون

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2 - 4x} = 3 \neq 0$$

لذا منحنی مجانب مایل با شیب $m = 3$ داشته و برای عرض از مبداء می نویسیم:

$$h = \lim_{x \to \pm\infty} y - mx = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{12x - 1}{x - 4} = 12$$

و خط $y = 3x + 12$ مجانب مایل منحنی خواهد بود.

مطلب ۵.۸ در برخی مسائل با تقسیم صورت بر مخرج مجانب مایل بدست می آید.

مثال ۲۳.۸ مجانب های تابع زیر را بیابید.

$$y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4}$$

حل. با تقسیم صورت بر مخرج داریم:

$$y = x + \frac{4x - 1}{x^2 - 4}$$

که وقتی $x \to \pm\infty$ عبارت $\frac{4x - 1}{x^2 - 4} \to 0$ صفر شده و تابع باقیماندهٔ $y = x$ مجانب مایل خواهد بود.

مطلب ۶.۸ مجانب توابعی بشکل $y = \alpha x + \beta + k\sqrt[n]{ax^n \pm bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots}$ عبارتست از

$$y = \alpha x + \beta + k\sqrt[n]{a}\left|x \pm \frac{b}{na}\right|$$

و البته علامت قدرمطلق تنها برای n–های زوج لازم است.

مثال ۲۴.۸ مطلوبست مجانب های تابع $y = 2x - 2 + 3\sqrt[4]{x^4 + 4x^2 + x - 2}$.

حل. از مطلب قبل داریم

$$y = 2x - 2 + 3\sqrt[4]{1}|x + 0| = 2x - 2 \pm 3x$$

و مجانبها عبارتند از $y = 5x - 2$ و $y = -x - 2$.

تمرین ۵.۸ .

۱) با بکار بستن قضیهٔ مقدار میانی، ثابت کنید تابع $f(x) = x^4 - 2x - 13$ یک ریشه بین ۲ و ۲– دارد.

۲) با استفاده از قضیهٔ فشردگی مقدار حد $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \sin\frac{1}{\sqrt{x}}$ را بیابید.

۳) مجانبهای توابع زیر را پیدا کنید.

$$(a)\quad y = \frac{x}{x^3 - 1}\ ,\quad (b)\quad y = \frac{1}{x}\ ,\quad (c)\quad y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9}\ ,\quad (d)\quad y = \frac{2x^3 + x^2 + 2x}{x^2 + 1}$$

(شیمی) از قانون دوم ترمودینامیک می توان تغییرات آنتروپی ΔS را برای یک ماده یافت، اما یافتن تغییرات آنتروپی بمعنی داشتن مقدار آنتروپی مطلق نیست. در فرآیند سرمایش یک ماده خالص، وقتی در فشار $1atm$ دمای T به صفر مطلق نزدیک می شود تنها هلیم بصورت مایع باقی می ماند و باقی عناصر در این حالت جامد هستند. در سال ۱۹۰۶م. والتر نرنست[۲] بیان نمود که ادامه روند سرمایش و فرآیند سرماسازی یک ماده تا رسیدن به صفر مطلق ممکن نبوده ولی می توان تا حد زیادی به این دما نزدیک شد و می توان چنین عنوان نمود که

$$\lim_{T\to 0} \Delta S = 0$$

در این حالت استخراج انرژی تا نهایت صفر مطلق از ماده بسختی ممکن بوده و عملاً محال است. این قانون که اکنون به عنوان **قانون سوم ترمودینامیک** شناخته می شود بیان می کند که «رسیدن به صفر مطلق محال است» و با بیان حدی «در هر فرآیند همدمائی که تنها با مواد خالصی که هر یک در تعادل درونی هستند درگیر باشد، وقتی $T \to 0$ تغییرات آنتروپی اش به صفر می گراید».

[۲] $Walther\ Nernst$ شیمیدان آلمانی

تمرین ۶.۸ تکمیلی.

۱) حدود زیر را با روش دلخواه محاسبه کنید.

$$(a)\quad \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{۱}{x} \qquad , \qquad (b)\quad \lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{۴}x}{۱-\cos^{۵}x}$$

$$(c)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin ۲x}{۵x^{۲}-۷x} \qquad , \qquad (d)\quad \lim_{x\to ۰} x[\frac{۱}{x}]$$

$$(e)\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^{۶}}-۱}{۱-۲x^{۳}} \qquad , \qquad (f)\quad \lim_{x\to\pm\infty} ۱-x-\sqrt[۴]{x^{۴}+۴x^{۳}+۲x-۸}$$

$$(g)\quad \lim_{x\to ۰}\sin x\sin\frac{۱}{x} \qquad , \qquad (h)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^{۲}+۲x-۱}-\sqrt{x^{۲}-۲x+۱}$$

$$(i)\quad \lim_{x\to ۰}\sin(\tan ۲x)\cos x \qquad , \qquad (j)\quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{۴\sqrt{x^{۴}-۲x^{۳}+۱}+۶x}+۲x$$

$$(k)\quad \lim_{x\to ۰} ۲\cot ۲x-\cot x \qquad , \qquad (l)\quad \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^{۲}-۲x+۴}+x-۲$$

$$(m)\quad \lim_{x\to+\infty} x^{۲}(۱-\cos\frac{۱}{x}) \qquad , \qquad (n)\quad \lim_{x\to ۰}\frac{\cos x}{x}$$

$$(o)\quad \lim_{x\to\pi}\frac{\sin ۱۰x}{\sin ۹x} \qquad , \qquad (p)\quad \lim_{x\to ۰}\frac{\sin(\cos x)}{\cos(\sin x)}$$

$$(q)\quad \lim_{x\to ۱}\frac{x^{۷}+۲x-۳}{x^{۶}+۲x-۳} \qquad , \qquad (r)\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{۱-x}}{۲x+\sqrt{۲}}$$

$$(s)\quad \lim_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{x}} \qquad , \qquad (t)\quad \lim_{x\to ۲^{+}}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{۲}+\sqrt{x-۲}}{\sqrt{x^{۲}-۴}}$$

$$(u)\quad \lim_{x\to ۰^{+}}\sqrt[x]{x} \qquad , \qquad (v)\quad \lim_{x\to ۱}|x^{۲}-۱|sgn(x-۱)$$

$$(w)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{۲}\cos x-۱}{۱-\tan^{۲}x} \qquad , \qquad (x)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\tan(۲x)\tan(\frac{\pi}{۴}-x)$$

$$(y)\quad \lim_{x\to ۱}\frac{\cos\dfrac{\pi x}{۲}}{۱-x} \qquad , \qquad (z)\quad \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{\sqrt{۱+\tan x}-\sqrt{۱-\tan x}}$$

$$(\alpha)\quad \lim_{x\to ۰}\sin x^{۲}\cos\frac{۱}{x} \qquad , \qquad (\beta)\quad \lim_{x\to ۰}\frac{(-۱)^{[x]}x}{\sin x}$$

$$(\gamma)\quad \lim_{x\to ۱}\frac{x^{۱۰۰}-۲x+۱}{x^{۱۰}-۲x+۱} \qquad , \qquad (\delta)\quad \lim_{x\to a}\frac{x^{n}-a^{n}-na^{n-۱}(x-a)}{(x-a)^{۲}}$$

$$(\varepsilon)\quad \lim_{x\to ۰}\frac{(۱-\sqrt[۲]{\cos x})(۱-\sqrt[۳]{\cos x})\cdots(۱-\sqrt[n]{\cos x})}{x^{۲n-۲}}$$

(راهنمائی ε: از نامساوی برنولی $(۱+t)^{\alpha}\approx ۱+\alpha t$ که برای α–های حقیقی معتبر است استفاده کنید. مثال ۳۱.۹)

۲) تعیین کنید که تابع زیر در $x = ۲$ پیوسته است یا خیر و سپس نمودار تابع را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{۲} - ۴}{x - ۲} & , \ x > ۲ \text{ اگر} \\ -۱ & , \ x = ۲ \text{ اگر} \\ -۲ + ۳x & , \ x < ۲ \text{ اگر} \end{cases}$$

۳) اگر $f(x) = \begin{cases} ۲x + a & , \ x \geq ۲, \\ ۵ - ax & , \ x < ۲. \end{cases}$ مقدار a را چنان پیدا کنید که

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} f(x)$$

۴) مطلوبست مقدار a چنانکه تابع زیر در $x = ۴$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} + ax - ۳a & , \ x > ۴ \text{ اگر} \\ a + ۱۶ & , \ x = ۴ \text{ اگر} \\ ۸ + ۲x + a & , \ x < ۴ \text{ اگر} \end{cases}$$

۵) مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع زیر در نقاط $x = ۲$ و $x = -۳$ حد داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax - b & , \quad x \leq -۳ \\ ۲x - a & , \ -۳ < x < ۲ \\ ۳ - ۲b - ۳x^{۲} & , \quad x \geq ۲ \end{cases}$$

۶) آیا تابع $g(x) = [x - ۱] - ۲[۲x] + ۱$ در $x = \frac{۱}{۲}$ حد دارد؟

۷) پیوستگی تابع $f(x) = ۲[x] + |۱ - x|$ را در نقاط $x = ۰$ و $x = ۱$ بررسی کنید.

۸) نشان دهید تابع زیر در $x = ۲$ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{\sqrt{x} - ۱} & , \ x \geq ۲ \text{ اگر} \\ \sqrt{x} + ۱ & , \ x < ۲ \text{ اگر} \end{cases}$$

۹) ثابت کنید تابع $f(x) = \sin ۵x + ۴ \cos ۳x - ۱$ یک ریشه در بازهٔ $[۰, \pi]$ دارد.

۱۰) مجانبهای توابع زیر را بیابید.

$$(a) \quad y = \frac{x - ۱}{x + ۱} \quad , \quad (b) \quad y = \frac{x^{۲} + ۱}{x + ۱} \quad , \quad (c) \quad y = ۲x - \sqrt[۳]{x^{۳} + ۶x^{۲} - ۱}$$

$$(d) \quad y = \frac{x^{۴} - ۱۶}{x^{۳} + ۸} \quad , \quad (e) \quad y = \frac{۱}{x \sin x} \quad , \quad (f) \quad y = \frac{\sin x}{x - \cos x}$$

۱۱) در تابع $y = \frac{ax^{۲} + bx + ۱}{x + c}$ مقادیر a، b و c را آنچنان تعیین کنید که خط $x = -۴$ مجانب قائم و $y = ۲x + ۳$ مجانب مایل تابع باشد.

۱۲) اگر حد تابعی در نقطهٔ $x = a$ موجود باشد ولی برابر $f(a)$ نباشد گوئیم در این نقطه **ناپیوستگی رفع شدنی** دارد و در غیر اینصورت **ناپیوستگی اساسی** دارد. در توابع زیر با ناپیوستگی رفع شدنی، با تعریف $f(a)$ مناسب ناپیوستگی را رفع نمائید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+۵}{x-۴} & , x \neq ۴, \\ ۲ & , x = ۴. \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^{۳}-۲۷}{x-۳} & , x \neq ۳, \\ ۴۱ & , x = ۳. \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} ۵ - x & , x < ۲, \\ x + ۱ & , x \geq ۲. \end{cases} \quad , \quad i(x) = \begin{cases} |x| & , x \neq ۰, \\ ۱ & , x = ۰. \end{cases}$$

$$j(x) = \frac{x^{۲} - ۴x + ۳}{x - ۳} \quad , \quad k(x) = \begin{cases} ۱ & , x > ۰, \\ ۰ & , x = ۰, \\ -۱ & , x < ۰. \end{cases}$$

۱۳) نقاط ناپیوستگی توابع $f(x) = x[x]$ و $g(x) = \left|x - [x] - \frac{۱}{۲}\right|$ را بیابید.

۱۴) اگر توابع f و g روی بازهٔ $I = [a, b]$ پیوسته بوده و $f(a) < g(a)$ و $f(b) > g(b)$ باشد ثابت کنید بازای $x_{۰} \in I$ی داریم $f(x_{۰}) = g(x_{۰})$.

۱۵) فرض کنید f روی $[۰, ۱]$ پیوسته باشد بطوریکه $۰ \leq f(x) \leq ۱$ نشان دهید که بازای $x_{۰} \in [۰, ۱]$ی $f(x_{۰}) = x_{۰}$.

۱۶) مرکز تقارن نمودار تابع زیر چیست؟

$$y = ax + b + \frac{k}{cx + d}$$

a، b، c، d و k اعداد حقیقی اند.

۱۷) اگر $a > ۱$ عددی حقیقی باشد واضح است که $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$ زیرا توانهای a بسرعت بزرگ می شوند. با استفاده از این مطلب نشان دهید $\lim_{x \to \infty} e^{-x} = ۰$ است و این حد در مباحث علمی بسیار کاربرد دارد. همچنین با استفاده از نمودار تابع $y = e^{-x}$ این مطلب را تایید نمائید (شکل۳.۷).

۱۸) **(فیزیک)** انرژی پتانسیل معروف به **یوکاوای** $U(r) = -\frac{r_{۰}}{r} U_{۰} e^{-\frac{r}{r_{۰}}}$ توصیفی از برهمکنش **نوکلئونها** (پروتونها و نوترونهای هسته) است ($r_{۰}$ و $U_{۰}$ ثابتهای عددی اند). با استفاده از قضیهٔ فشردگی نشان دهید اگر فاصلهٔ r بین این ذرات زیاد شود، مقدار انرژی یوکاوای از بین خواهد رفت.

۱۹) **(فیزیک)** در مکانیک نسبیتی انرژی جنبشی ذره ای بجرم سکون $m_\circ$ و سرعت v با رابطهٔ $E_k = (m - m_\circ)c^{۲}$ بیان می شود که c سرعت نور است و $m = \dfrac{m_\circ}{\sqrt{۱ - \frac{v^{۲}}{c^{۲}}}}$ جرم نسبیتی ذرهٔ در حال حرکت است. با فرمول برنولی (ذیل تمرین ۱) نشان دهید که وقتی $v \ll c$ سپس E_k همان مقدار انرژی جنبشی کلاسیک خواهد بود[۳]. نشان دهید وقتی $v \to c$ کل جرم به انرژی تبدیل می شود.

۲۰) **(زیست)** در مطالعهٔ امراض مسری، معادلهٔ

$$\ln(۱ - y) - \ln y = C - kt$$

بدست آمده که y نسبت مبتلایان به یک بیماری خاص در زمان t بر کل جمعیت است. (الف) معادلهٔ y را بر حسب متغیر مستقل t و ثابتهای C، k بیان کنید. (ب) نشان دهید $\lim_{t\to\infty} y = ۱$ یعنی با گذشت زمان تمام جمعیت به مرض مبتلا می شوند. (ج) در صورت عدم پیشگیری چه مدت نصف جمعیت مبتلا می شوند؟ (بر حسب ثابت های C و k)

---

[۳] عبارت $a \ll b$ یعنی a از b خیلی کوچکتر است.

فصل ۹

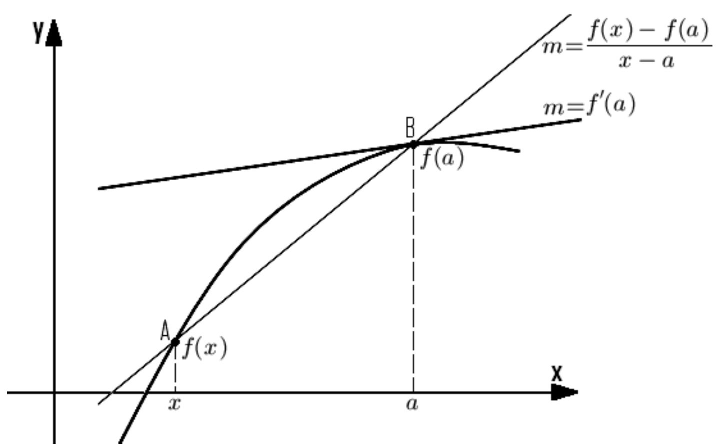
مشتق و کاربردهای آن

۱.۹ تعاریف

مشتق یک تابع در نقطه‌ای مانند $x = a$ را با $f'(a)$ نشان داده و به یکی از دو شکل زیر **تعریف** می کنیم:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (۱) \quad , \quad f'(x) = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad (۲)$$

چنین تعریفی از مشتق، وابسته به وجود حد است اعم از اینکه حد متناهی یا نامتناهی باشد. وقتیکه این مقدار متناهی باشد گوئیم تابع در آن **نقطه مشتق پذیر** است. تابعی که در تمام دامنه‌اش مشتق داشته باشد را **تابع مشتقپذیر** گوئیم. مثلاً توابع چندجمله‌ای عموماً توابعی مشتقپذیر هستند.



شکل ۱.۹ وقتی $x \to a$ سپس $A \to B$ و خط AB به خط مماس میل می کند.

مفهوم هندسی مشتق یک تابع در یک نقطه عبارتست از شیب خط مماسی که از آن نقطه بر نمودار آن تابع رسم می شود. بنابراین آنچه در (۱) و (۲) بیان شده با روش هندسی کاملاً قابل توجیه است. بدیهی است در (۲) مقدار Δx برابر با $x - a$ بوده و عبارت $\Delta x \to ۰$ معادل با $x \to a$ است.

مثال ۱.۹ با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x+۱}$ را در نقطه $x = ۳$ بیابید.

حل. با استفاده از تعریف (۱) می نویسیم:

$$\begin{aligned} f'(۳) &= \lim_{x\to ۳} \frac{f(x)-f(۳)}{x-۳} \\ &= \lim_{x\to ۳} \frac{\sqrt{x+۱}-۲}{x-۳} \\ &= \lim_{x\to ۳} \frac{\sqrt{x+۱}-۲}{x-۳} \times \frac{\sqrt{x+۱}+۲}{\sqrt{x+۱}+۲} \\ &= \lim_{x\to ۳} \frac{(x+۱)-۴}{(x-۳)(\sqrt{x+۱}+۲)} \\ &= \lim_{x\to ۳} \frac{۱}{\sqrt{x+۱}+۲} \\ &= \frac{۱}{۴} \end{aligned}$$

مثال ۲.۹ با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را بدست آورید.

حل. با استفاده از تعریف (۲) می نویسیم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{۱}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \end{aligned}$$

گفتیم مقدار مشتق یک تابع، وابسته به وجود حد است که می تواند متناهی یا نامتناهی باشد و در حالتی که این مقدار متناهی باشد تابع در آن نقطه مشتقپذیر است. وقتی مشتق نامتناهی است

تابع در آن نقطه مشتق ندارد ولی شیب خط مماس در آن نقطه برابر $\pm\frac{\pi}{2}$ خواهد بود. از طرفی چون مشتق تابع بصورت حد تعریف می شود، بنابراین می توان حد چپ و راست را برای مشتق بصورت زیر تعریف نموده که آنها را **مشتق چپ** f'_- و **مشتق راست** f'_+ می نامیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad , \qquad f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

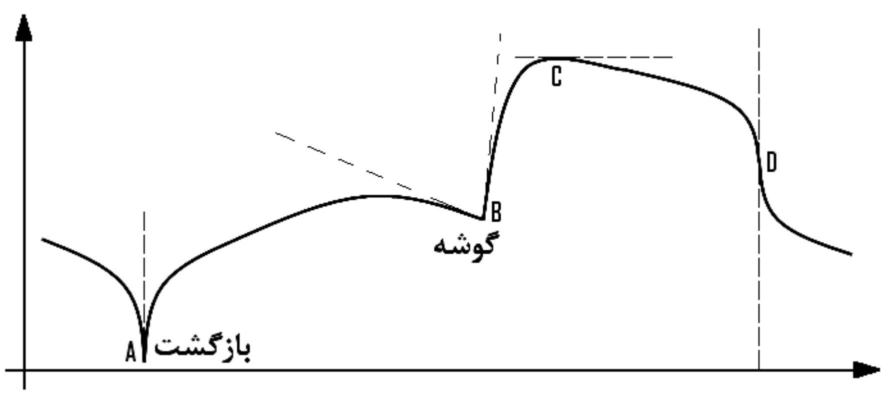
مطابق وجود حد، از آنجائیکه حد تابع وقتی موجود است که حد چپ و راست موجود و برابر باشند، مشتق یک تابع نیز وقتی وجود دارد که مشتق چپ f'_- و مشتق راست f'_+ موجود بوده و با هم برابر باشند. بنابراین در حالت کلی:

مطلب ۱.۹ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ مشتقپذیر است اگر در این نقطه پیوسته بوده و

$$f'_+(a) = f'_-(a)$$

همچنین اگر $f(x)$ در $x = a$ مشتقپذیر باشد، پیوسته نیز هست.

اگر $f'_-(a) = \infty$ یا $f'_+(a) = \infty$ باشد، گوئیم تابع در $x = a$ مشتقپذیر نیست در این حالت تابع دارای مماس چپ و راست است. همینطور اگر مشتق چپ و راست موجود و متناهی باشند ولی مساوی نباشند گوئیم تابع در آن نقطه **گوشه** دارد. در صورتیکه مشتق چپ و راست نامتناهی و نامساوی باشند گوئیم آن نقطه، **نقطهٔ بازگشت** تابع است.



شکل ۲.۹ در این شکل A نقطه بازگشت و B نقطه گوشه، در نقطه C مماس شیبی برابر صفر داشته و در D تابع مشتق چپ و راست نامتناهی ولی برابر دارد.

مثال ۳.۹ مشتق چپ و راست تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۲ & , \quad x < ۱, \\ ۲x + ۱ & , \quad x \geq ۱. \end{cases}$ را در $x = ۱$ بیابید.

حل. ابتدا مطابق مطلب ۱.۹ بررسی می کنیم که این تابع در $x = ۱$ پیوسته است. سپس برای مشتق چپ و راست داریم:

$$\begin{aligned} f'_-(۱) &= \lim_{x\to ۱^-} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} \\ &= \lim_{x\to ۱^-} \frac{(x^۲+۲)-۳}{x-۱} \\ &= \lim_{x\to ۱^-} \frac{x^۲-۱}{x-۱} \\ &= ۲ \\ f'_+(۱) &= \lim_{x\to ۱^+} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} \\ &= \lim_{x\to ۱^+} \frac{(۲x+۱)-۳}{x-۱} \\ &= \lim_{x\to ۱^+} \frac{۲(x-۱)}{x-۱} \\ &= ۲ \end{aligned}$$

تساوی این دو نتیجه می دهد که تابع مشتق پذیر بوده و $f'(۱) = ۲$.

مثال ۴.۹ مقادیر a و b را بیابید چنانکه تابع زیر در $x = ۲$ مشتق پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ - ۱ & , x \geq ۲ \text{ اگر} \\ ax + b & , x < ۲ \text{ اگر} \end{cases}$$

حل. طبق مطلب ۱.۹ ابتدا بررسی می کنیم که این تابع در $x = ۲$ پیوسته است، پس

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) = f(۲) \Longrightarrow ۲(۲)^۲ - ۱ = a(۲) + b \Longrightarrow ۲a + b = ۷$$

برای مشتق چپ و راست می نویسیم:

$$\begin{aligned} f'_+(۲) &= \lim_{x\to ۲^+} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} \\ &= \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲x^۲-۱-۷}{x-۲} \\ &= ۸ \\ f'_-(۲) &= \lim_{x\to ۲^-} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} \\ &= \lim_{x\to ۲^-} \frac{ax+b-۷}{x-۲} \\ &= \lim_{x\to ۲^-} \frac{ax-۲a}{x-۲} \\ &= a \end{aligned}$$

از $f'_+(۲) = f'_-(۲)$ معلوم می شود که $a = ۸$ و نیز $b = ۷ - ۲a = -۹$ است.

تمرین ۱.۹ .

۱) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = x^۳ + ۱$ را در نقطه $x = ۲$ بدست آورید.

۲) با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x} + ۱$ را در $x = ۴$ بیابید.

۳) مشتق تابع $f(x) = |x|$ را در نقطه $x = ۰$ بیابید.

۴) مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۲a & , \quad x < ۱, \\ ax + b & , \quad x \geq ۱. \end{cases}$ در $x = ۱$ مشتقپذیر باشد.

۵) مقادیری از a و b بیابید که تابع زیر در $x = -۱$ مشتقپذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ + a & , \quad x > -۱ \text{ اگر} \\ ax^۳ + b & , \quad x \leq -۱ \text{ اگر} \end{cases}$$

٦) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x}$ را در نقطه $x = ۰$ بدست آورده و مشخص کنید که این نقطه گوشه است یا بازگشت.

۷) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt[۳]{|x - ۱|}$ را در نقطه $x = ۱$ بدست آورده و مشخص کنید که این نقطه گوشه است یا بازگشت و یا هیچکدام.

۱.۱.۹ فرمولهای مشتق

از تعریف مشتق می توان مشتق توابع مختلفی را محاسبه نمود و سپس از آنها بهره برد. در واقع ما تنها در موارد خاصی از تعریف مشتق استفاده می کنیم و در اکثر حالات وقتی تابع پیوسته است فرمولهای مشتق را با آزادی کامل بکار می بریم.

مطلب ۲.۹ برای چند تابع، مشتق را محاسبه نموده ایم که طبق جدول زیر است:

$$c \implies ۰ \qquad \text{(عدد ثابت)} \tag{۱}$$

$$x^r \implies rx^{r-۱} \qquad (r \text{ حقیقی}) \tag{۲}$$

$$u^r \implies ru'u^{r-۱} \qquad (u \text{ تابع دلخواه}) \tag{۳}$$

$$\sqrt{x} \implies \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \tag{۴}$$

$$\sqrt[n]{x^m} \implies \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}} \tag{۵}$$

$$\sqrt[n]{u^m} \implies \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}} \qquad (u \text{ تابع دلخواه}) \tag{٦}$$

مشتق خطی است یعنی

$$\Big[af(x) \pm bg(x)\Big]' = af'(x) \pm bg'(x)$$

و می توان از مجموع و تفاضل توابع براحتی مشتق گرفت. بنابراین با استفاده از تعاریف مشتق در مطلب بالا می توان مشتق توابع مختلف را محاسبه نمود، به مثالهای زیر توجه کنید:

$$\begin{aligned}
\Big(7x^6 - 5x^4 - 3x + 4\Big)' &= 7\Big(x^6\Big)' - 5\Big(x^4\Big)' - 3\Big(x\Big)' + 0 \\
&= 7 \times 6x^5 - 5 \times 4x^3 - 3 = 42x^5 - 20x^3 - 3 \\
\Big(10x^{10} - 5x^7 + 8x - 2\Big)' &= 100x^9 - 35x^6 + 8 \\
\Big((x^7 - 7x)^{10}\Big)' &= +10(7x^6 - 7)(x^7 - 7x)^9 \\
\Big((x^8 + 2x^3 + 5x^2)^3\Big)' &= 3(8x^7 + 6x^2 + 10x)(x^8 + 2x^3 + 5x^2)^2 \\
\Big(x^{2/4} + (2x^4 - 5x)^{13}\Big)' &= 2/4x^{1/4} + 13(8x^3 - 5)(2x^4 - 5x)^{12} \\
\Big(x^7 + (x^3 + 5x - 3)^8\Big)' &= 7x^6 + 8(3x^2 + 5)(x^3 + 5x - 3)^7 \\
\Big(\sqrt[25]{x^3} - \sqrt[8]{(x^2 - x)^3}\Big)' &= \frac{3}{25\sqrt[25]{x^{22}}} - \frac{3(2x - 1)}{8\sqrt[8]{(x^2 - x)^5}}
\end{aligned}$$

مطلب ۳.۹ برای توابع مثلثاتی و تابع دلخواه u، مشتق طبق جدول زیر است:

$$\sin u \implies u' \cos u \tag{7}$$

$$\cos u \implies -u' \sin u \tag{8}$$

$$\tan\ u \implies u'(1 + \tan^2 u) \tag{9}$$

$$\cot\ u \implies -u'(1 + \cot^2 u) \tag{10}$$

مثالهای زیر را ببینید:

$$\Big(\sin 3x + 4\cos 2x\Big)' = 3\cos 3x - 8\sin 2x$$

$$\Big(\tan x^3 - 4\cot 2x\Big)' = 3x^2(1 + \tan^2 x^3) + 8(1 + \cot^2 2x)$$

$$\Big(\sin(x^2 + 1) + 5\cos(x^3 - 4x)\Big)' = 2x\cos(x^2 + 1) - 5(3x^2 - 4)\sin(x^3 - 4x)$$

$$\Big(\cot(x^4 - 3x^3 + 5x)\Big)' = -(4x^3 - 9x^2 + 5)\Big(1 + \cot^2(x^4 - 3x^3 + 5x)\Big)$$

$$\Big(\tan^4 x\Big)' = 4(1 + \tan^2 x)\tan^3 x$$

$$\Big(\sqrt{\sin x + \cos x}\Big)' = \frac{\cos x - \sin x}{2\sqrt{\sin x + \cos x}}$$

مسلماً برای مشتق توابع مثلثاتی مطلب ۳.۹ با تابعی از x، فرمولهای مشتق چنین خواهد بود:

$$\sin x \implies \cos x \quad (۱۱)$$

$$\cos x \implies -\sin x \quad (۱۲)$$

$$\tan x \implies ۱+\tan^{۲} x \quad (۱۳)$$

$$\cot x \implies -(۱+\cot^{۲} x) \quad (۱۴)$$

تمرین ۲.۹ .

۱) مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$(a)\quad y=۴x^{۴}+x^{۲}-۱۵x+۸$, $(b)\quad y=x^{۵}-x^{۴}+۶x^{۳}-۲x-۱$

$(c)\quad y=(۲x^{۳}-۶x)^{۴}$, $(d)\quad y=(۴x^{۶}-۲x)^{۲۳}$

$(e)\quad y=\sqrt[۳]{۳x^{۲}-۵x+۱}$, $(f)\quad y=\sin x+\cos ۲x$

$(g)\quad y=۳x(x^{۳}+۵x-۲)$, $(h)\quad y=(۳x^{۲}+۱)(x-۲)$

$(i)\quad y=\sqrt{\tan ۳x}$, $(j)\quad y=۲x-\frac{۳}{x^{۵}}+\frac{۱}{x^{۷}}$

$(k)\quad y=\frac{۲}{x^{۵}}-\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x^{۳}}}{\sqrt[۴]{x^{۵}}}$, $(l)\quad y=\frac{۲x^{۳}+۴x^{۲}-۵x-۱}{x^{۴}}$

$(m)\quad y=\frac{۶}{x^{۹}}-\frac{\sqrt{x^{۵}}}{x^{۳}}$, $(n)\quad y=\sqrt{\sin ۴x+\cos ۴x}$

$(o)\quad y=x^{۴}-\frac{۱}{x^{۴}}$, $(p)\quad y=\sqrt[۴]{(\tan x+\cot x)^{۳}}$

$(q)\quad y=۳\sin ۲x-۵\cos ۳x+۱$, $(r)\quad y=\sin(۵x^{۲}+۳x-۵)$

$(s)\quad y=\sin(\cos x)$, $(t)\quad y=\tan(\sin x)$

$(u)\quad y=۲\sin ۲x\cos ۲x$, $(v)\quad y=(\sin x)^{۴}$

$(w)\quad y=\cos^{۴} x$, $(x)\quad y=\tan^{۴} x$

$(y)\quad y=۳\cos^{۲} x-\sin ۱$, $(z)\quad y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

۲) با استفاده از فرمول (۵) مشتق تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ را به ازای $x=۰$ بدست آورید.

۳) مشتق تابع زیر را در $x=۴$ بیابید.

$$y=۴\sqrt{x}-\sqrt[۳]{(x^{۲}-۲x)^{۲}}+\frac{۲}{\sqrt{x}}-۸\frac{۱}{\sqrt[۴]{x^{۳}}}$$

۴) مقدار مشتق تابع $y=\sqrt[۳]{\cos(\sin ۲x)}$ را در $x=\pi$ بیابید.

۲.۱.۹ قوانین مشتقگیری

چنانکه در ذیل مطلب ۲.۹ گفته شد مشتق مجموع توابع برابر مجموع مشتقهای آنهاست ولی برای ضرب یا خارج قسمت دو تابع چنین فرمولی صحیح نیست. بدین منظور برای اعمال مشتق ضرب و تقسیم توابع، قوانین زیر بکار می روند.

(۱۵) مشتق حاصلضرب دو تابع $uv \Rightarrow u'v+v'u$

(۱٦) مشتق حاصلضرب سه تابع $uvw \Rightarrow u'vw+v'uw+w'uv$

(۱۷) مشتق خارج‌قسمت دو تابع $\frac{u}{v} \Rightarrow \frac{u'v-v'u}{v^{۲}}$

که u و v و w توابعی دلخواهند. مثالهای مختلف از فرمولهای مذکور فوق چنین است:

(الف) مشتق تابع $y=(x^{۳}+۲x-۴)(۵x^{۲}+۷x)$ را از (۱۵) حساب می کنیم:

$$y'=(۳x^{۲}+۲)(۵x^{۲}+۷x)+(۱۰x+۷)(x^{۳}+۲x-۴)$$

(ب) مشتق تابع $y=(x^{۴}+۲)(x^{۳}-۹x+۲)^{٦}$ نیز از (۱۵) محاسبه می شود:

$$y'=(۴x^{۳})(x^{۳}-۹x+۲)^{٦}+٦(۳x^{۲}-۹)(x^{۳}-۹x+۲)^{۵}(x^{۴}+۲)$$

(ج) مشتق تابع $y=(x^{۲}+x)(x-۴)(x^{۴}+۱)$ را از (۱٦) محاسبه می کنیم:

$$y'=(۲x+۱)(x-۴)(x^{۴}+۱)+(x^{۲}+x)(۱)(x^{۴}+۱)+(x^{۲}+x)(x-۴)۴x^{۳}$$

(د) برای مشتق تابع خارج قسمتی $y=\frac{۳x^{۴}-۵x+۲}{x^{۳}-۱}$ باید فرمول (۱۷) را استفاده کنیم:

$$y'=\frac{(۱۲x^{۳}-۵)(x^{۳}-۱)-(۳x^{۲})(۳x^{۴}-۵x+۲)}{(x^{۳}-۱)^{۲}}$$

مثال ۵.۹ مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{x\sin x-\cos x}{\sin x-x}$ را در $x=۲\pi$ حساب کنید.

حل. با استفاده از فرمول مشتق تابع خارج قسمت می نویسیم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin x+x\cos x+\sin x)(\sin x-x)-(\cos x-۱)(x\sin x-\cos x)}{(\sin x-x)^{۲}} \\ &= \frac{۲\sin^{۲}x-x\sin x-x^{۲}\cos^{۲}x+\cos^{۲}x-\cos x}{(\sin x-x)^{۲}} \end{aligned}$$

با جایگذاری مقدار ۲π بجای x مقدار $f'(۲\pi)=-۱$ حاصل می شود.

مثال ۶.۹ مشتق تابع $y=\dfrac{\sqrt{x}+۶x}{(x^{۵}+۶۵)^{۳}}$ را بیابید.
حل. با استفاده از فرمول مشتق تابع خارج قسمت و مشتق رادیکال داریم:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+۶)(x^{۵}+۶۵)^{۳}-۳(۵x^{۴})(x^{۵}+۶۵)^{۲}(\sqrt{x}+۶x)}{(x^{۵}+۶۵)^{۶}} \\ &= \frac{(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+۶)(x^{۵}+۶۵)-۱۵x^{۴}(\sqrt{x}+۶x)}{(x^{۵}+۶۵)^{۴}} \end{aligned}$$

مطلب ۴.۹ مشتق توابع دیگر بصورت زیر است که u و v نیز توابع دلخواهی بر حسب x می‌باشند.

$$\ln u \implies \frac{u'}{u} \qquad (۱۸)$$

$$a^{u} \implies u'a^{u}\ln a \qquad \text{عددثابت } a \qquad (۱۹)$$

$$e^{u} \implies u'e^{u} \qquad \text{عدد نپر } e \qquad (۲۰)$$

$$u^{v} \implies u^{v}(v'\ln u+\frac{vu'}{u}) \qquad \text{مشتق توابع توانی} \qquad (۲۱)$$

$$\arcsin u \implies \frac{u'}{\sqrt{۱-u^{۲}}} \qquad (۲۲)$$

$$\arccos u \implies \frac{-u'}{\sqrt{۱-u^{۲}}} \qquad (۲۳)$$

$$\arctan\ u \implies \frac{u'}{۱+u^{۲}} \qquad (۲۴)$$

$$arccot\ u \implies \frac{-u'}{۱+u^{۲}} \qquad (۲۵)$$

$$\sinh u \implies u'\cosh u \qquad (۲۶)$$

$$\cosh u \implies u'\sinh u \qquad (۲۷)$$

به مثالهای زیر توجه کنید:

$$\Big(\ln(۴x^{۴}+۶x-۷)\Big)'=\frac{۱۶x^{۳}+۶}{۴x^{۴}+۶x-۷}$$

$$\Big(۳^{۲x^{۷}-۶x+۳}\Big)'=(۱۴x^{۶}-۶)۳^{۲x^{۷}-۶x+۳}\ln ۳$$

$$\Big(e^{۷x^{۵}+۶x-۱۹}\Big)'=(۳۵x^{۴}+۶)e^{۷x^{۵}+۶x-۱۹}$$

$$\Big((x^{۳}-۱)^{x^{۵}+۶}\Big)'=(x^{۳}-۱)^{x^{۵}+۶}\Big(۵x^{۴}\ln(x^{۳}-۱)+\frac{(x^{۵}+۶)(۳x^{۲})}{x^{۳}-۱}\Big)$$

$$\Big(\arcsin(x^{۲}+۱)\Big)'=\frac{۲x}{\sqrt{۱-(x^{۲}+۱)^{۲}}}$$

$$\Big(۲\sinh ۳x+۴\cosh ۲x\Big)'=۶\cosh ۳x+۸\sinh ۲x$$

تمرین ۳.۹ از توابع زیر مشتق بگیرید.

$$
\begin{array}{llll}
(a) & y=(x^{۳}-۹x)(x^{۴}-۳x+۷) & , & (b)\quad y=(x^{۴}+x^{۲})(x^{۳}+x)\\
(c) & y=(x^{۵}-x^{۲})(x^{۷}+۴x-۸)^{۴} & , & (d)\quad y=x^{۳}(۲\sqrt{x}-۵)(۳x^{۴}+۴x)\\
(e) & y=\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱} & , & (f)\quad y=\dfrac{\ln x-۱}{e^{x}+۲}\\
(g) & y=\dfrac{x^{۴}-x}{x^{۴}+۴x-۸} & , & (h)\quad y=(\sqrt{x^{۲}-۱}-۴x)(x^{۲}-۷x)\\
(i) & y=(۲x^{۳}+۳)\left(\dfrac{۲x-۴}{۸x+۶}\right)^{۲} & , & (j)\quad y=\dfrac{(\sqrt{x^{۲}-۱}-۴x)(x^{۲}-۷x)}{x^{۴}+۶}\\
(k) & y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x} & , & (l)\quad y=\sin(\cosh x)\cos(\sinh x)\\
(m) & y=\dfrac{\sin ۲x}{\sin ۲x+\cos ۲x} & , & (n)\quad y=۳\sin^{۲}(\cos x)+\tan(\cos x)\\
(o) & y=\dfrac{x\cos x}{\sin^{۲}x+۱} & , & (p)\quad y=\sin^{x}x\\
(q) & y=۲^{\sin ۳x}+\ln(\tan x) & , & (r)\quad y=\tan(\sin ۳x)-۲\cos^{۳}(x^{۴})\\
(s) & y=\arcsin(x+\ln x) & , & (t)\quad y=\sinh(\arcsin x+\arccos x)\\
(u) & y=۲^{\arcsin ۲x}+(\arccos x)^{۲} & , & (v)\quad y=\tan^{۳}(\arcsin ۵x)
\end{array}
$$

۳.۱.۹ مشتق مراتب بالا

تاکنون مشتق مرتبه اول را توضیح داده و آنرا با y' نشان دادیم. نماد دیگری که برای مشتق اول بکار می رود $\dfrac{dy}{dx}$ است که نشاندهندهٔ مشتق y برحسب x است، یعنی

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

مشتق دوم یک تابع (با مشتق پیوسته) را می توان چنین تعریف نمود:

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

که عبارتست از مشتق مشتق تابع و با نمادگذاری جدید چنین نشان داده می شود:

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$$

در حالت کلی برای تابع $y=f(x)$ مشتقهای اول f' و دوم f'' و سوم f''' و بطور کلی مشتق n–ام را می توان بصورت $y^{(n)}$ یا $f^{(n)}(x)$ معرفی کرد، یعنی

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^{n}y}{dx^{n}}$$

برای مشتقات مراتب دلخواه یک تابع فرمول مشخصی وجود ندارد، تنها در برخی موارد با بدست آوردن مشتقهای مراتب مختلف توابعی چند، می توان قاعدهٔ کلی برای مشتق n−ام آنها یافت.

مثال ۷.۹ فرمول مشتق n−ام تابع $y = \frac{۱}{x}$ را پیدا کرده و مقدار $y^{(۱۰۰)}$ را بیابید.

حل. ابتدا چند مرتبه مختلف از مشتق تابع را بدست آورده و فرمول مشتق n−ام را طبق آنها حدس می‌زنیم.

$$\left\{\begin{array}{lcl} y' & = & \frac{-۱}{x^۲} \\ y'' & = & \frac{۲!}{x^۳} \\ y''' & = & \frac{-۳!}{x^۴} \\ y^{(۴)} & = & \frac{۴!}{x^۵} \\ & \vdots & \end{array}\right. \Longrightarrow \quad y^{(n)} = (-۱)^n \frac{n!}{x^{n+۱}}$$

بنابراین $y^{(۱۰۰)} = (-۱)^{۱۰۰} \frac{۱۰۰!}{x^{۱۰۱}} = \frac{۱۰۰!}{x^{۱۰۱}}$ مشتق صدم تابع است.

۴.۱.۹ مشتق ضمنی

با نظری به تابع $x^۳ + ۲y^۵ - xy = ۳x$ در می یابیم که در این تابع متغیر y قابل جداسازی از متغیر x نبوده و نمی توانیم آنرا بصورت تابعی مستقل بنویسیم. به این نوع تابع، **تابع ضمنی** گوئیم. نام تابع ضمنی در مقابل **تابع صریح** بکار می رود که تابع $y = f(x)$ به شکل جداشده‌ای از متغیرهای x و y نوشته می شود.

برای مشتقگیری از y دو روش وجود دارد:

الف) **مشتق مستقیم**: در این روش با استفاده از فرمولهای مشتق، از طرفین مشتقگیری کرده و فرض می کنیم که $x' = ۱$ و تابع y' را مستقلاً در جای خود ذکر می کنیم. برای مثال مشتق ضمنی تابع بالا چنین می شود:

$$\begin{aligned} ۳x^۲ + ۲(۵y'y^۴) - (۱.y + y'x) &= ۳ \\ ۳x^۲ + ۱۰y'y^۴ - y - xy' - ۳ &= ۰ \end{aligned}$$

ب) **مشتق جزئی**: برای تابع $f(x,y) = ۰$ مشتق ضمنی را بصورت

$$y' = -\frac{f_x}{f_y}$$

تعریف می کنیم که f_x مشتق نسبت f به x و f_y مشتق نسبت f به y است. دقت کنید که در این حالت می بایست فرض کنیم که $x' = ۱$ و $y' = ۱$ هستند. هر چند این روش را اجمالاً با نام جزئی معرفی می کنیم ولی در واقع روشی کلی در مشتقگیری توابع چند متغیره است و در فصل ۱۹ بتفصیل از آن صحبت خواهیم کرد.

مثال ۸.۹ مشتق ضمنی تابع $۳x^۳ + ۳\sin y = ۴y - ۲\pi$ را در نقطهٔ $(-۱, \frac{\pi}{۲})$ بیابید.

حل. داریم $f(x,y) = ۳x^۳ + ۳\sin y - ۴y + ۲\pi = ۰$ و با فرمول مشتق جزئی قسمت (ب) می نویسیم:

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{۹x^۲}{۳\cos y - ۴} \quad \Longrightarrow \quad y'(-۱) = \frac{۹}{۴}$$

تمرین ۴.۹ .

۱) مشتق دوم تابع $y = \dfrac{\tan x - ۱}{\tan x + ۱}$ را در $x = \dfrac{\pi}{۴}$ پیدا کنید.

۲) مشتق دوم تابع $\cos^۳(\sin ۳x)$ را بیابید.

۳) فرمولی برای مشتق n–ام تابع $y = \dfrac{x^۲ + ۱}{x}$ بدست آورید.

۴) مشتق توابع ضمنی زیر را بیابید.

$$(a) \quad y^۳ - \sin(xy) = ۲x \qquad , \quad (b) \quad x^۴ + y^۴ = ۴xy + ۱$$
$$(c) \quad \ln(xy) = \cos x + y^۲ \qquad , \quad (d) \quad \tan(x + ۲y) = \sqrt[۳]{\sin x + \cos y}$$

۵.۱.۹ مشتق توابع پارامتری

برای مشتق تابع پارامتری (از بخش ٦.٧) و تابعی مانند $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$ مشتق هر دو تابع x و y را نسبت به t حساب کرده و بنابراین مشتق تابع عبارتست از $\begin{cases} x_t = x'(t), \\ y_t = y'(t). \end{cases}$. از نماد لایب‌نیتز مشتق تابع می توان نوشت:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y_t}{x_t}$$

مثال ۹.۹ مطلوبست مقدار مشتق تابع $\begin{cases} x = ۳t - t^۳ + ۱, \\ y = ۴t^۲ + t + ۱. \end{cases}$ در $t = ۰$.

حل. با مشتقگیری بر حسب t داریم $\begin{cases} x_t = ۳ - ۳t^۲, \\ y_t = ۸t + ۱. \end{cases}$ و طبق فرمول بالا

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{y_t}{x_t} = \frac{۸t + ۱}{۳ - ۳t^۲} \\ y'(۱) &= \left.\frac{۸t + ۱}{۳ - ۳t^۲}\right|_{t=۰} = \frac{۱}{۳} \end{aligned}$$

مثال ۱۰.۹ مقدار مشتق تابع پارامتری $\begin{cases} x = ۱ + \cos t, \\ y = t \sin t. \end{cases}$ را در نقطهٔ $t = \pi$ بیابید.

حل. داریم $\begin{cases} x_t = -\sin t, \\ y_t = \sin t + t \cos t. \end{cases}$ و با جایگذاری

$$y'(x) = \frac{y_t}{x_t} = \frac{\sin t + t \cos t}{-\sin t}$$

پس

$$y'(\circ) = \frac{\sin \pi + \pi \cos \pi}{-\sin \pi} = \frac{-\pi}{\circ} = \infty$$

برای مشتق دوم یک تابع پارامتری چنین می نویسیم:

$$y''(x) = \frac{d^۲ y}{dx^۲} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x_t}$$

مثال ۱۱.۹ مشتق دوم تابع پارامتری $\begin{cases} x = ۱ + t^۲, \\ y = t + t^۲. \end{cases}$ را بیابید.

حل. داریم $\begin{cases} x_t = ۲t, \\ y_t = ۱ + ۲t. \end{cases}$ و با جایگذاری $y'(x) = \frac{y_t}{x_t} = \frac{۱ + ۲t}{۲t}$ در ادامه با مشتقگیری مجدد $y'_t = \frac{۲ \times (۲t) - ۲ \times (۱ + ۲t)}{۴t^۲} = \frac{-۱}{۲t^۲}$ و بدینصورت می نویسیم:

$$y''(x) = \frac{y'_t}{x_t} = \frac{\frac{-۱}{۲t^۲}}{۲t} = \frac{-۱}{۴t^۳}$$

۶.۱.۹ مشتق ترکیب دو تابع

برای تابع $y = f(u)$ که u تابعی بر حسب x است، مشتق را به شکل $y' = f'(u)u'$ تعریف می‌کنیم. در این فرمول مشتق f بر حسب متغیر u چنان است که $u' = ۱$ ولی از خود u بر حسب متغیر مستقل x مشتق گرفته می شود.

مثال ۱۲.۹ مشتق تابع $y = \sin^۲(\cos ۲x)$ را بیابید.

حل. تابع حاضر را می توان بصورت $y = \sin^۲ u$ چنان جدا نمود که $u = \cos ۲x$ طبق فرمول مشتق ترکیب دو تابع از آنجا که $y'(u) = ۲ \sin u \cos u$ و $u'(x) = -۲ \sin ۲x$ پس

$$\begin{aligned} y'(x) &= f'(u)u'(x) \\ &= ۲ \sin u \cos u \times -۲ \sin ۲x \\ &= ۲ \sin(\cos ۲x) \cos(\cos ۲x) \times -۲ \sin ۲x \\ &= -۴ \sin ۲x \sin(\cos ۲x) \cos(\cos ۲x) \end{aligned}$$

۷.۱.۹ مشتق تابع وارون

اگر تابع $y = f(x)$ تابعی پیوسته و یک به یک با وارون g باشد و تابع g در $y_\circ = f(x_\circ)$ پیوسته باشد، در این صورت g در $y_\circ$ مشتقپذیر با مشتق زیر است:

$$g'(y_\circ) = \frac{۱}{f'(x_\circ)}$$

بشرطی که $f'(x_\circ) \neq \circ$. شاید اثبات این فرمول به فهم آن کمک کند زیرا از آنجاکه g تابع وارون f است پس $gof(x) = x$ با مشتق از ترکیب $g(f(x)) = x$ داریم $g'(f(x))f'(x) = ۱$ و در نقطهٔ $y_\circ = f(x_\circ)$ نتیجه می دهد $g'(f(x_\circ))f'(x_\circ) = ۱$ یا $g'(y_\circ)f'(x_\circ) = ۱$ که نتیجهٔ مورد نظر است. اهمیت این قضیه آنست که مشتق تابع وارون یک تابع را می توان بدون داشتن تابع وارون بدست آورد حتی وقتی که تابع وارون آن قابل محاسبه نباشد، مثلاً در توابع ضمنی. مثال زیر را ببینید:

مثال ۱۳.۹ مشتق تابع وارون تابع $x^۳ + y^۳ - ۲xy = ۵$ را در نقطهٔ $(۱, ۲)$ بیابید.

حل. متغیر x از y قابل جداسازی نبوده لذا از مشتق ضمنی استفاده کرده و می نویسیم:

$$۳x^۲ + ۳y'y^۲ - ۲y - ۲xy' = \circ$$

با جایگذاری مقادیر داریم $y' = \frac{۱}{۱\circ}$ و مشتق تابع وارون برابر است با

$$g'(۲) = \frac{۱}{f'(۱)} = ۱\circ$$

تمرین ۵.۹ .

۱) مطلوبست مقدار مشتق اول و دوم تابع پارامتری $\begin{cases} x = t^۳ + t, \\ y = t^۲ - t - ۱. \end{cases}$ در $t = \circ$.

۲) مطلوبست مقدار مشتق اول و دوم تابع پارامتری $\begin{cases} x = \sin t - \cos t + ۱, \\ y = \sin t + \cos t - ۱. \end{cases}$ در $t = \circ$.

۳) مشتق تابع وارون تابع $x^۴ + y^۴ + xy = x + y + ۱$ را در نقطهٔ $(۱, ۱)$ بیابید.

۴) مشتق تابع وارون تابع $\sin(xy) + ۴x^۲y - y^۲ = \pi^۲$ را در نقطهٔ $(۱, \frac{\pi}{۲})$ بیابید.

۵) با استفاده از مشتق ترکیب توابع، مشتق توابع زیر را بیابید.

$$(a) \quad y = \sin(\cos^۲ x) \quad , \quad (b) \quad y = \sin(\sin x + \cos x)$$
$$(c) \quad y = \sin(\cos(\tan x)) \quad , \quad (d) \quad y = \sqrt[۳]{\sin^۲ x + ۱}$$
$$(e) \quad y = (x^۴ + ۱)^۹ \quad , \quad (f) \quad y = \sin^۲\left(\ln(x^۲ + x) + ۱\right)$$
$$(g) \quad y = \sqrt[۸]{(\tan x - ۱)^۳} \quad , \quad (h) \quad y = \sqrt[x]{\tan(\tan(\tan ۲x))}$$

۲.۹ کاربرد مشتق

هرچند خود مشتق در بسیاری از مسائل بنحو مستقیم استفاده می شود، با این وجود گاهی اوقات آنرا مکملی برای یافتن مجهولات جبری و هندسی بکار می گیریم. مختصری از کاربردهای عمومی مشتق را در ذیل ذکر نموده ولی کاربردهای آنرا تا انتهای کتاب دنبال خواهیم نمود.

۱.۲.۹ خط مماس و قائم بر منحنی

همانگونه که در ابتدای فصل گفته شد **شیب خط مماس عبارت است مشتق تابع در نقطهٔ تماس**، یعنی $m = f'(x_\circ)$. پس با بدست آوردن مشتق تابع در نقطه‌ای مفروض، می توان شیب خط مماس و قائم را در آن نقطه از منحنی یافت. معادلات خط مماس و قائم بر منحنی تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $x_\circ$ بصورت زیر است:

$$y - f(x_\circ) = f'(x_\circ)(x - x_\circ) \qquad \text{معادله خط مماس}$$

$$y - f(x_\circ) = \frac{-۱}{f'(x_\circ)}(x - x_\circ) \qquad \text{معادله خط قائم}$$

مسلماً اگر شیب صفر باشد خط مماس موازی محور x–ها و اگر ∞ شد موازی محور y–هاست.

مثال ۱۴.۹ معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y = ۲\sin x + ۱$ را در $x = \pi$ پیدا کنید.

حل. برای شیب داریم $f'(\pi) = ۲\cos\pi = -۲$ و معادلات خط مماس و قائم طبق فرمولهای بالا بصورت زیر خواهد بود:

$$y - ۱ = -۲(x - \pi) \implies \quad y = -۲x + ۱ + ۲\pi \qquad \text{معادله خط مماس}$$

$$y - ۱ = \frac{-۱}{-۲}(x - \pi) \implies \quad y = \frac{۱}{۲}x + ۱ - \frac{\pi}{۲} \qquad \text{معادله خط قائم}$$

۲.۲.۹ زاویهٔ بین دو منحنی

زاویهٔ بین دو منحنی عبارتست از زاویهٔ بین مماسهای آنها در نقطهٔ برخوردشان. برای بدست آوردن زاویهٔ بین دو منحنی شیب خطوط مماس بر دو منحنی را در نقطهٔ تقاطع آنها پیدا نموده (مثلاً $m_۱$ و $m_۲$) و سپس از فرمول زاویهٔ بین دو خط

$$\tan\theta = \left|\frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ m_۲}\right|$$

زاویهٔ θ بین دو منحنی را بدست می آوریم.

مثال ۱۵.۹ زاویه بین دو منحنی زیر را بدست آورده و نشان دهید دو منحنی بر هم عمودند.

$$y = \frac{x^۳}{۶} - \frac{x^۲}{۴} \quad , \quad y = \frac{-۱}{۴}x^۲ + \frac{۴}{۳}$$

حل. محل برخورد دو منحنی عبارتست از

$$\begin{aligned} \frac{x^۳}{۶} - \frac{x^۲}{۴} &= \frac{-۱}{۴}x^۲ + \frac{۴}{۳} \\ x^۳ &= ۸ \\ x &= ۲ \end{aligned}$$

مشتق دو منحنی را در $x = ۲$ پیدا می کنیم:

$$y = \frac{x^۳}{۶} - \frac{x^۲}{۴} \implies y' = \frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۲}x \implies m_۱ = y'(۲) = ۱$$
$$y = \frac{-۱}{۴}x^۲ + \frac{۴}{۳} \implies y' = -\frac{۱}{۲}x \implies m_۲ = y'(۲) = -۱$$

از فرمول زاویهٔ بین دو خط می نویسیم:

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \left|\frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ m_۲}\right| \\ &= \left|\frac{(۱) - (-۱)}{۱ + (۱)(-۱)}\right| \\ &= \infty \\ \theta &= \frac{\pi}{۲} \end{aligned}$$

تمرین ۶.۹ .

۱) معادلهٔ خطوط مماس و قائم بر منحنی $y = \sin x - ۳x + ۱$ را در $x = \pi$ پیدا کنید.

۲) معادلهٔ مماس و قائم بر منحنی $y = ۳\sin^۲ x - ۴\cos x$ را در $x = \frac{\pi}{۲}$ بیابید.

۳) خط مماس بر منحنی $y = ۳x^۲ - ۵$ که موازی خط $۲x + ۳y = ۴$ است را پیدا کنید.

۴) معادلهٔ خطوط مماس و قائم بر منحنی $\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = ۲$ را در $(۵, ۴)$ بیابید.

۵) زاویهٔ بین منحنی های $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را $x = \frac{\pi}{۴}$ حساب کنید.

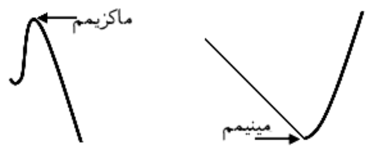
۳.۲.۹ نقاط اکسترمم

گوئیم مقدار تابع f در نقطهٔ a ماکزیمم (بیشین) است اگر برای نقاط واقع در یک همسایگی از a داشته باشیم:

$$f(x) \leq f(a)$$

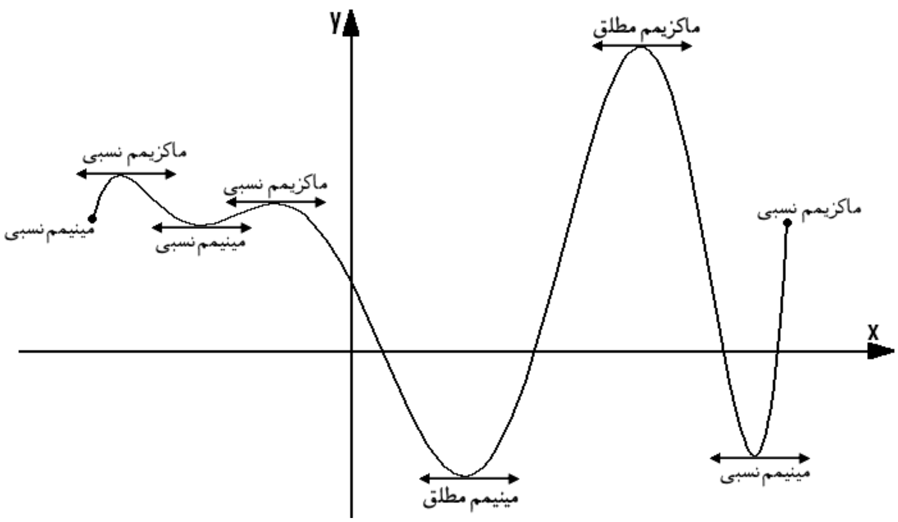
گوئیم مقدار تابع f در نقطهٔ a مینیمم (کمین) است اگر برای نقاط واقع در یک همسایگی از a داشته باشیم:

$$f(x) \geq f(a)$$



شکل **۳.۹** نمایش نقاط ماکزیمم و می نیمم

هر تابع که در یک بازهٔ بسته پیوسته باشد، در آن بازه دارای مقدار **ماکزیمم** و یا مقدار **می‌نیمم** است. به نقاط ماکزیمم و مینیمم یک تابع نقاط **اکسترمم** اطلاق می شود. نقاط اکسترمم تابع نسبی اند یعنی نسبت به نقاط موجود در یک همسایگی شان دارای بیشترین یا کمترین مقدارند. به بزرگترین نقطهٔ ماکزیمم، **ماکزیمم مطلق** و به کوچکترین می نیمم، **مینیمم مطلق** می گوئیم. شکل ۴.۹ نقاط اکسترمم یک تابع را نشان می دهد[۱]. بطور کلی هر تابعی که در فاصلهٔ مشخصی پیوسته و کراندار باشد در آن فاصله دارای ماکزیمم (max) یا می نیمم (min) نسبی است.



شکل **۴.۹** نمودار یک منحنی و نقاط اکسترمم آن

[۱]– نمودار تابع $y = (x^۲ - ۹)(x^۲ - ۳٦)(x^۲ - ٦۴)(x + ۵)$

هرگاه تابع f در نقطه‌ای مانند $x_\circ$ مشتق پذیر نبوده و یا مشتقش صفر باشد گوئیم $x_\circ$ نقطه‌ای **بحرانی** برای f است.

مطلب ۵.۹ هرگاه f در $x_\circ$ اکسترمم نسبی داشته باشد، f در $x_\circ$ بحرانی است.

طبق این مطلب اگر f در $x_\circ$ مشتقپذیر بوده و اکسترمم نسبی داشته باشد پس $f'(x_\circ) = \circ$ است.

مثال ۱٦.۹ نقاط اکسترمم تابع $y = ۲x^۳ - ۹x^۲ + ۱۲x - ۷$ را مشخص کنید.

حل. با مشتقگیری، نقاط اکسترمم عبارتند از

$$y' = ٦x^۲ - ۱۸x + ۱۲ = ٦(x - ۱)(x - ۲) = \circ \implies x = ۱\ ,\ x = ۲$$

و نقاط $B(۲, -۳)$ و $A(۱, -۲)$ نقاط اکسترمم این تابعند. دقت کنید که طبق مطلب ۵.۹ این نقاط، ممکن است تنها نقاط اکسترمم موجود نباشند.

لازم به ذکر است که مطالب مذکور در مطلب ۵.۹، شروط **لازم** برای وجود نقاط اکسترمم هستند اما **کافی** نیستند. مثلاً چون تابع در نقاط ابتدا و انتهای بازه دارای همسایگی نیست، لذا در این نقاط مشتقپذیر نبوده و تابع در این نقاط دارای اکسترمم نسبی نیست[۲]. بنابراین عکس مطلب ممکن است درست نباشد، برای مثال تابع $f(x) = x^۳$ با مشتق $f'(x) = ۳x^۲$ بازای $f'(x) = \circ$ نقطهٔ $x = \circ$ را بحرانی نشان می دهد اما این نقطه اکسترمم نیست. برای یافتن این شروط کافی، آزمونهائی را ارائه می دهیم تا نقاط اکسترمم تابع مشخص شود.

از مطالب بخش ۱.۳.۷ چنین می توان نتیجه گرفت:

مطلب ٦.۹ در یک بازهٔ دلخواه، اگر $f' > \circ$ باشد، تابع صعودی و اگر $f' < \circ$ تابع نزولی است.

مطلب ۷.۹ **(آزمون مشتق اول)** فرض کنید تابع مشتقپذیر f حول $x_\circ$ پیوسته بوده و در این نقطه بحرانی باشد، سپس

۱) اگر بازای نقاط سمت چپ $x_\circ$، تابع صعودی و برای نقاط سمت راست $x_\circ$ تابع نزولی باشد، آنگاه تابع در $x_\circ$ دارای ماکزیمم نسبی است.

۲) اگر بازای نقاط سمت چپ $x_\circ$، تابع نزولی و برای نقاط سمت راست $x_\circ$ تابع صعودی باشد، آنگاه تابع در $x_\circ$ دارای می نیمم نسبی است.

[۲]– هرچند وقتی نقاط انتهائی بیشترین یا کمترین مقدار بین تمام عرضها باشند به آنها ماکزیمم مطلق یا می نیمم مطلق اطلاق می کنیم.

مثال ۱۷.۹ در تابع $f(x) = (x+1)^2(x+2)^2$ بازه‌هائی را مشخص کنید که تابع در آنها صعودی یا نزولی است.

حل. تابع f چندجمله‌ای و پیوسته است و با مشتقگیری، نقاط بحرانی عبارتند از

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+1)(x+2)^2 + 2(x+1)^2(x+2) \\ &= 2(x+1)(x+2)(x+2+x+1) \\ &= 2(x+1)(x+2)(2x+3) = 0 \Longrightarrow \ x=-1\ ,\ x=-2\ ,\ x=-\frac{3}{2} \end{aligned}$$

برای تعیین بازه های صعودی و نزولی با تعیین علامت مشتق می نویسیم:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		-1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{16}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			min		max		min		

جهت پیکانها بازه‌هائی را مشخص می کند که تابع در آن صعودی $\nearrow$ و نزولی $\searrow$ است.

فرض کنید که طبق مطلب ۵.۹، نقطهٔ x_0ـی یافت شده که مشتق در آن صفر بوده و یا اینکه وجود ندارد، برای مشخص کردن نوع اکسترمم از **آزمون مشتق اول** استفاده می کنیم. نقاط انتهائی را نیز لحاظ کنید. درصورتیکه آزمون مشتق اول نوع اکسترمم را تعیین نکرد می توانیم از آزمون مشتق دوم که در ذیل بیان می گردد بهره ببریم.

مطلب ۸.۹ **(آزمون مشتق دوم)** برای تابع f اگر $f'(x_0) = 0$ و $f''(x_0)$ موجود باشد سپس

۱) اگر $f''(x_0) > 0$ باشد تابع در x_0 می‌نیمم نسبی دارد.

۲) اگر $f''(x_0) < 0$ باشد تابع در x_0 دارای ماکزیمم نسبی است.

مثال ۱۸.۹ نوع نقاط اکسترمم مذکور در مثال ۱۶.۹ را تعیین کنید.

حل. چون $f''(x) = 12x - 18$ بنابراین $f''(1) = -6 < 0$ و نقطهٔ A ماکزیمم و نیز $f''(2) = 6 > 0$ یعنی نقطهٔ B می نیمم تابع است.

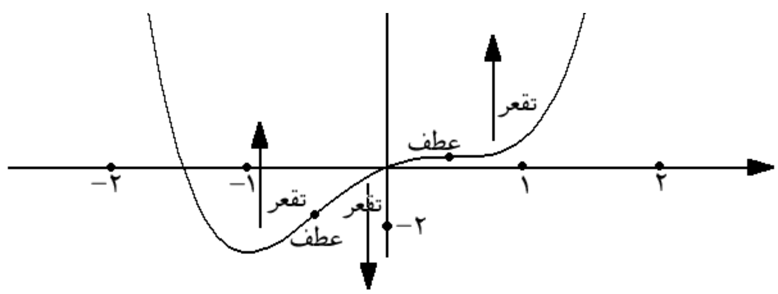
در طول یک بازه ممکن است جهت تقعر (گودی) منحنی بارها تغییر نماید. بطورکلی اگر در یک بازه $f'' > 0$ باشد جهت تقعر منحنی به بالاست و اگر $f'' < 0$ باشد جهت تقعر منحنی رو به پائین است. **نقطهٔ عطف** یک تابع نقطه ای است که در همسایگی آن جهت تقعر منحنی عوض می‌شود. بعبارتی دیگر اگر مشتق دوم موجود باشد، نقطهٔ عطف تابع نقطه‌ای است که مشتق دوم در آنجا صفر می شود، یعنی برای بدست آوردن نقطهٔ عطف تابع «لازمست» که $f''(x_0) = 0$ باشد. برای وجود نقطهٔ عطف کافی است که f'' در این نقطه تغییر علامت دهد:

مطلب ۹.۹ اگر تابع f حول $x_۰$ مشتقپذیر بوده و $x_۰$ عطف تابع باشد و $f''(x_۰)$ موجود باشد سپس $f''(x_۰) = ۰$ است. عکس این مطلب درست نیست.

مثال ۱۹.۹ نقاط عطف تابع $y = ۲x^۴ - ۳x^۲ + ۲x$ را تعیین کنید.

حل. چون $f''(x) = ۲۴x^۲ - ٦ = ۰$ بنابراین نقاط $x = \pm\frac{۱}{۲}$ نقاط عطف تابعند. جدول تغییر علامت مشتق دوم چنین است:

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۲}$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
y''		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
جهت تقعر		بسمت بالا		بسمت پائین		بسمت بالا	



شکل ۵.۹ نمودار مثال ۱۹.۹

تمرین ۷.۹ .

۱) برای هر تابع زیر، بازه‌هائی را مشخص کنید که تابع در آنها صعودی یا نزولی است.

$$\begin{array}{llll}
(a) & y = ۲x^۳ - ۱۵x^۲ + ۲۴x - ۱۰ & , & (b) \quad y = x + \frac{۱}{x} \\
(c) & y = \sin x \quad ; \quad [۰, ۲\pi] & , & (d) \quad y = ۳ - (x - ۳)^۲ \\
(e) & y = \sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{x + ۱} & , & (f) \quad y = x^۴(۱ - x)^۵ \\
(g) & y = (x^۲ - ۹)^۲ & , & (h) \quad y = \sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{x + ۱}
\end{array}$$

۲) نقاط اکسترمم و همچنین نقاط عطف توابع زیر را بیابید. نوع نقاط اکسترمم را با آزمونهای مشتق اول و دوم تعیین نمائید.

$$\begin{array}{llllll}
(a) \quad y = x^۴ - x^۲ & , & (b) \quad y = ۴x^۵ - ۵x^۲ + ۱ & , & (c) \quad y = x^۳ - ۳x^۲ \\
(d) \quad y = \sin x & , & (e) \quad y = \sin x + \cos x & , & (f) \quad y = \frac{۱}{\sin x + \cos x}
\end{array}$$

$$(g)\quad y=\frac{x}{x+۲}\quad,\quad (h)\quad y=\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۴}\quad,\quad (i)\quad y=x^{۳}(x+۳)^{٦}$$

$$(j)\quad y=\frac{x^{۳}}{x^{۲}+۱۲}\quad,\quad (k)\quad y=۲x\sqrt{۱+x^{۲}}\quad,\quad (l)\quad y=\left(\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۱}\right)^{۲}$$

۳) نشان دهید که تابع $y=\sqrt[۳]{x-۱}$ با وجود اینکه در نقطهٔ $x=۱$ مشتق اول و دوم ندارد اما این نقطه، نقطهٔ عطف تابع است.

۴) آیا یک تابع باید بین دو نقطهٔ عطف متوالی، لزوماً اکسترمم نسبی داشته باشد؟ بین دو نقطهٔ عطف غیر متوالی چطور؟

۵) اگر $y=ax^{۳}+bx^{۲}+c$ سپس مقادیر a، b و c را چنان بیابید که نقطهٔ $(-۱,-۲)$ عطف تابع بوده و نمودار تابع محور طولها را در ۱ قطع کند.

٦) نشان دهید که نقطهٔ $O\big(b,f(b)\big)$ مرکز تقارن تابع $y=x^{۳}-۳bx^{۲}+cx+d$ است که بر نقطه عطف تابع منطبق است.

۴.۲.۹ رسم توابع

برای رسم نمودار یک تابع با کمک مطالب عنوان شده در بخشهای قبل، لازم است مراحل زیر را بترتیب اجرا کنید:

- دامنهٔ تابع را بدست آورید.
- مجانبهای تابع را بدست آورید.
- با استفاده از مشتق اول نقاط اکسترمم احتمالی تابع را بیابید.
- مشتق دوم تابع را محاسبه و نقاط عطف تابع را بیابید.
- جدول زیر که **جدول تغییرات منحنی** است را رسم کنید.
- با استفاده از جدول تغییرات و داده های آن، نمودار منحنی را رسم نمائید.

x	$-\infty$		a		مقائم	b	$+\infty$
y'		-	۰	$+$	$\mid$	۰	
y	مافقی	$\searrow$	$\mid$	$\nearrow$	$\sharp$	$\mid$	مافقی
			$f(a)$		$\sharp$	$f(b)$	

هر چه جزئیات بیشتری درباره تابع آشکار کنیم بهتر آنرا شناخته و رسم خواهیم نمود. گاهی اوقات نقاط کمکی نیز به رسم تابع کمک فراوان می کنند.

مثال ۲۰.۹ رسم تابع $y = \frac{x+۲}{x^۲ - x - ۲}$

حل. مطابق مراحل بالا رفتار می کنیم.

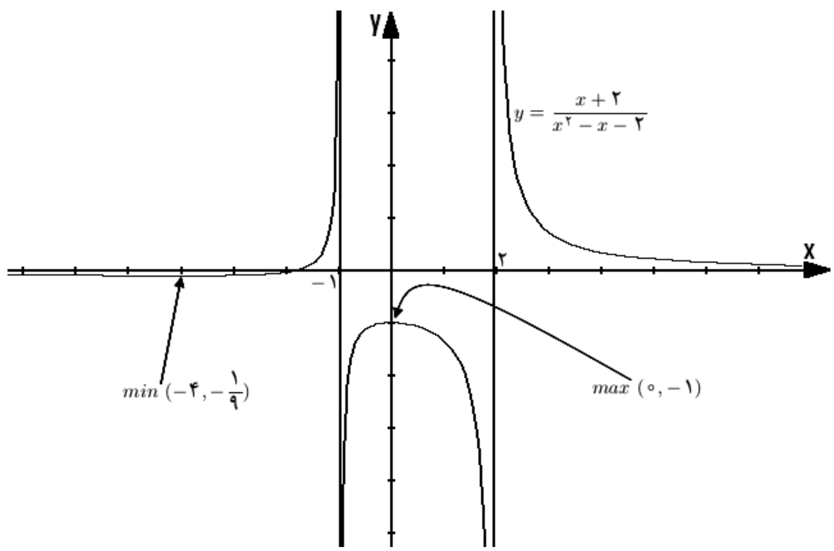
$$D_f = \mathbb{R} - \{-۱, ۲\}$$

$x^۲ - x - ۲ = ۰ \Longrightarrow x = -۱, x = ۲$ مجانبهای قائم , $y = ۰$ مجانب مایل

$y' = \frac{-x^۲ - ۴x}{(x^۲ - x - ۲)^۲} = ۰ \Longrightarrow x = ۰, x = -۴$ اکسترمم

x	$-\infty$		-۴		-۱		۰		۲		∞
y'		-	۰	$+$	$\sharp$	$+$	۰	-	$\sharp$	-	
y	۰	$\searrow$	$\frac{-۱}{۹}$	$\nearrow$	$\sharp$	$\nearrow$	-۱	$\searrow$	$\sharp$	$\searrow$	۰
			min		$\sharp$		max		$\sharp$		

نمودار این تابع با جزئیات مشخص شده توسط جدول تغییرات چنین است:



شکل ۶.۹ نمودار مثال ۲۰.۹

تمرین ۸.۹ توابع زیر را رسم کنید.

$(a)\ \ y = ۲x^۴ - ۱۶x^۲ + ۱۰ \quad , \quad (b)\ \ y = \frac{x-۱}{x^۲ + x - ۶} \quad , \quad (c)\ \ y = \frac{۱}{۱ + x^۲}$

$(d)\ \ y = \frac{x^۲ + ۱}{x^۲ + ۳x - ۴} \quad , \quad (e)\ \ y = \frac{۲x^۲ - ۲x + ۳}{x^۲ - x} \quad , \quad (f)\ \ y = \frac{x^۲ - ۴}{x^۲ + x}$

۵.۲.۹ بهینه سازی

وقتی صحبت از یافتن مقداری با شرایط خاصی است، شرایط را باید قسمت اهمّ مسئله دانست. اگر یافتن این مقدار، مبتنی بر ماکزیمم یا می نیمم بودن آن باشد مسئله را تحت عنوان **بهینه‌سازی** مطرح می کنیم. در مسائل بهینه سازی، ابتدا تابع بهینه ساز را یافته و سپس طبق شرایط مطرح شده، مقدار بهینه را می یابیم.

مثال ۲۱.۹ عددی در بازهٔ $[۰, ۱)$ بیابید که تفاضل آن با مربعش ماکزیمم شود.

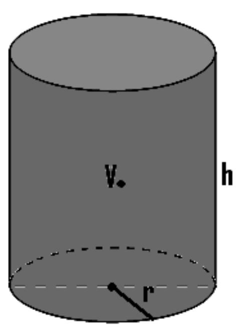
حل. با فرض اینکه $x \in (۰, ۱]$ تابع بهینه ساز را بصورت $f(x) = x - x^۲$ تعریف می‌کنیم. برای یافتن مقدار بهینه، مطابق مباحث گفته شده برای اکسترمم داریم:

$$f(x) = x - x^۲ \implies f'(x) = ۱ - ۲x = ۰ \implies x = \frac{۱}{۲}$$

رسم جدول تغییرات، مقدار ماکزیمم $y = \frac{۱}{۴}$ را تایید می کند.

x	۰		$\frac{۱}{۲}$		۱
y'		+	۰	-	
y	۰	$\nearrow$	$\frac{۱}{۴}$ max	$\searrow$	۰

مثال ۲۲.۹ می خواهیم قوطی استوانه‌ای شکلی بسته، با حجم ثابت $V_۰$ با قاعده ای دایره‌ای از مقوا بسازیم. نسبت ارتفاع قوطی به شعاع قاعده چگونه باشد که در ساختش کمترین مقوا بکار رود؟



شکل ۷.۹ استوانه مثال ۲۲.۹

حل. مانند شکل۷.۹ با این فرض که r شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه باشد مساحت قاعده $\pi r^۲$ و مساحت جانبی $۲\pi rh$ است و بدین ترتیب مساحت کل قوطی چنین است:

$$S = ۲\pi rh + ۲\pi r^۲$$

حجم قوطی مقدار ثابت $V_\circ = \pi r^۲ h$ بوده لذا $h = \frac{V_\circ}{\pi r^۲}$ و تابع مساحت کل عبارتست از

$$S(r) = ۲\pi r \frac{V_\circ}{\pi r^۲} + ۲\pi r^۲ = \frac{۲V_\circ}{r} + ۲\pi r^۲ \quad , \quad r \in [\circ, \infty)$$

جهت بهینه بودن مساحت کل $S'(r) = -\frac{۲V_\circ}{r^۲} + ۴\pi r = \circ$ یعنی $r = \sqrt[۳]{\frac{V_\circ}{۲\pi}}$. آزمون مشتق دوم نشان می دهد که $S''(r) = ۱۲\pi > \circ$ و این نقطه مینیمم $S(r)$ محسوب می شود. همچنین از این مقدار داریم $V_\circ = ۲\pi r^۳$ با جایگذاری در عبارت $V_\circ = \pi r^۲ h$ نسبت $h = ۲r$ حاصل می شود که نشان می دهد برای استفادهٔ حداقل از مقوا می بایست ارتفاع استوانه برابر قطر قاعدهٔ آن باشد.

۶.۲.۹ قضیهٔ مقدار میانگین و قضیهٔ رل

قضیهٔ مقدار میانگین: اگر f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته بوده و در بازهٔ (a,b) مشتق پذیر باشد، در اینصورت نقطه‌ای چون $c \in (a,b)$ هست بقسمی که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

مثال ۲۳.۹ ثابت کنید برای $\circ \le x < \frac{\pi}{۲}$ داریم $\tan x \ge x$

حل. برای هر x در بازهٔ $\left(\circ, \frac{\pi}{۲}\right)$ با فرض $a = \circ$ و $b = x$ طبق قضیهٔ مقدار میانگین یک c که $\circ < c < x$ چنان وجود دارد که

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} \Longrightarrow \frac{\tan x - \circ}{x - \circ} = ۱ + \tan^۲ c \ge ۱ \Longrightarrow \frac{\tan x}{x} \ge ۱$$

و اثبات تمام است.

در حالت خاص قضیهٔ مقدار میانگین به قضیهٔ رل تبدیل می شود که چنین است:

قضیهٔ رل: اگر f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته و در بازهٔ (a,b) مشتق پذیر باشد و $f(a) = f(b)$، آنگاه نقطه‌ای چون $c \in (a,b)$ هست که $f'(c) = \circ$.

مثال ۲۴.۹ نشان دهید معادلهٔ $x^۳ + x + ۱ = \circ$ حداکثر یک ریشهٔ حقیقی دارد.

حل. اگر تابع $f(x) = x^۳ + x + ۱$ دارای دو ریشهٔ متمایز a و b باشد پس $f(a) = f(b) = \circ$ و طبق قضیهٔ رل یک c هست چنانکه $f'(c) = \circ$ اما $f'(x) = ۳x^۲ + ۱ > \circ$ و مشتق هیچگاه صفر نمی شود و بدین ترتیب وجود دو ریشهٔ متمایز منتفی است.

۷.۲.۹ قاعدهٔ هوپیتال

یکی از مزایای مشتق محاسبهٔ برخی از حدود است که با روشهای دیگر بسختی قابل حل هستند. طبق این قاعده، اگر مقدار حد کسری

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

برابر مقدار مبهم $\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ شود، در اینصورت می توانیم با محاسبهٔ مشتق صورت و مخرج، حد را بصورت زیر بنویسیم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

در محاسبهٔ حدود، گاهی لازم است این قاعده را چند بار بکار ببریم.

مثال ۲۵.۹ مطلوبست مقدار حدود $\lim_{x\to ۰^+} x\ln x$ و $\lim_{x\to\infty} x^۲e^{-x}$

حل. برای استفاده از قاعدهٔ هوپیتال می بایست عبارت حدی، لزوماً شکل کسری داشته و حاصل مبهم شود بدین ترتیب

$$\lim_{x\to ۰^+} x\ln x=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\ln x}{\frac{۱}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}\overset{hop}{\hookrightarrow}\lim_{x\to ۰^+}\frac{\frac{۱}{x}}{\frac{-۱}{x^۲}}=\lim_{x\to ۰^+}-x=۰$$

$$\lim_{x\to\infty} x^۲e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^۲}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{hop}{\hookrightarrow}\lim_{x\to\infty}\frac{۲x}{e^x}\overset{hop}{\hookrightarrow}\lim_{x\to\infty}\frac{۲}{e^x}=\frac{۲}{\infty}=۰$$

مثال ۲۶.۹ محاسبهٔ حد $y=\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۱}{x})^x$ با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال.

حل. با استفاده از $\ln$ توان را از بین برده و عبارت حدی شکل کسری پیدا می کند:

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۱}{x})^x\\
&= \lim_{x\to\infty}\ln(۱+\frac{۱}{x})^x\\
&= \lim_{x\to\infty}x\ln(۱+\frac{۱}{x})\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(۱+\frac{۱}{x})}{\frac{۱}{x}}\\
&\overset{hop}{\hookrightarrow} \lim_{x\to\infty}\frac{۱}{۱+\frac{۱}{x}}\\
&= ۱
\end{aligned}$$

و $\ln y=۱$ بنابراین $y=e^۱=e$ در نتیجه $\lim_{x\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^x=e$.

تمرین ۹.۹ .

۱) عددی در بازهٔ $[0\,,2]$ بیابید که مجموع آن با معکوسش ماکزیمم شود.

۲) دو عدد پیدا کنید که مجموعشان ۱۰۰ و حاصلضربشان بیشترین مقدار شود.

۳) حداکثر ارتفاع منحنی $3\sin x+2xy-y=0$ را از محور x–ها بیابید.

۴) با استفاده از قضیهٔ رل ثابت کنید که تابع $y=\sin x+x-1$ در بازهٔ $(0\,,\pi)$ دارای ریشه است.

۵) نشان دهید تابع $y=\sin x+\cos x$ در فاصلهٔ $(0\,,2\pi)$ در قضیه مقدار میانگین و یا رل صدق می کند و سپس c مفروض در قضیه را بیابید.

۶) نشان دهید معادلهٔ $x^3+2x+4=0$ نمی تواند بیش از یک ریشهٔ حقیقی داشته باشد.

۷) بررسی کنید که تابع $y=\dfrac{1}{x+2}$ در فاصلهٔ $[0\,,4]$ در قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند و سپس c مفروض در قضیه را پیدا کنید.

۸) بررسی کنید که تابع $y=\sqrt{x}-2$ در فاصلهٔ $[0\,,3]$ در قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند و سپس c مفروض در قضیه را بیابید.

۹) با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین ثابت کنید $|\sin x|\leq|x|$.

۱۰) می خواهیم قیفی بسته با حجم ثابت V_0 بشکل مخروط با قاعده‌ای دایره‌ای از مقوا بسازیم. نسبت ارتفاع قیف به شعاع قاعده چگونه باشد که در ساختش کمترین مقوا بکار رود؟

۱۱) مطلوبست محاسبهٔ حدود زیر با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال.

$$(a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^8-1}{x^7-1}\ ,\quad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}\ ,\quad (c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0^+}x^x\ ,\quad (e)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-1}{x}\ ,\quad (f)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$$

$$(g)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan\ x)}{\cos 2x}\ ,\quad (h)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log_{10}(1+x)}{10^x-1}\ ,\quad (i)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$$

۳.۹ دیفرانسیل

مسلماً تغییرات یک تابع وابسته به تغییرات متغیر مستقل در یک نقطه است و میزان تغییرات به شکل تابع در آن نقطه بستگی دارد. واضح است که اگر تابعی در نقطه ای شیب بیشتری داشته باشد تغییرات شدیدتری دارد. هدف ما بررسی میزان تغییرات تابع بر اساس تغییرات متغیر مستقل است و برای اینکار از دیفرانسیل کمک می گیریم. در ابتدا به حساب تغییرات متغیرهای x و y می پردازیم و ارتباط آنها را بیان می نمائیم.

۱.۳.۹ حساب تغییرات

فرض کنید $y = f(x)$ ضابطهٔ تابعی از متغیر مستقل x و متغیر مستقل y باشد، میزان تغییرات متغیر مستقل x در بازهٔ $[x_۱, x_۲]$ را با $\Delta x = x_۲ - x_۱$ نشان داده و آنرا **نمو** x نامیم. همچنین میزان تغییرات تابع را که بین مقادیر $y_۱$ و $y_۲$ جابجا می شود را با $\Delta y = y_۲ - y_۱$ نشان داده و آنرا **نمو** y گوئیم. ضابطهٔ f بیان کنندهٔ ارتباط میان Δx و Δy است.

مثال ۲۷.۹ میزان تغییرات هر واحد از منحنی $y = x^۲ + ۱$ در بازهٔ $[-۲, ۳]$ چنین است:

x	y	Δx	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
-۲	۵			
-۱	۲	$-۱ - (-۲) = ۱$	$۲ - ۵ = -۳$	-۳
۰	۱	$۰ - (-۱) = ۱$	$۱ - ۲ = -۱$	-۱
۱	۲	$۱ - (۰) = ۱$	$۲ - ۱ = ۱$	۱
۲	۵	$۲ - (۱) = ۱$	$۵ - ۲ = ۳$	۳
۳	۱۰	$۳ - (۲) = ۱$	$۱۰ - ۵ = ۵$	۵

توجه کنید که سطر اول خالی است زیرا مقادیر قبل از آن برای تفاضل و یافتن نمو وجود ندارد. در بازه‌ای که مشتق (در صورت وجود) منفی باشد تابع نزولی بوده و نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ منفی است. عموماً این نسبت تغییرات را **آهنگ (میزان) تغییر متوسط** نامند و می نویسیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

که در بازهٔ $[x, x + \Delta x]$ آهنگ رشد یا کاستی تابع را نشان می دهد. برای Δx خیلی کوچک این نسبت بیانگر **تغییر لحظه‌ای** (آنی) تابع است زیرا از آنجا که مشتق بصورت حد

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

تعریف می شود، در یک همسایگی کوچک x این حد، تقریب خوبی از تساوی است و برای Δx خیلی کوچک می توان نوشت:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

و البته این هنگامی صحیح است که در بازهٔ $(x - \Delta x, x + \Delta x)$ مشتق کراندار باشد. پس اگر برای Δx خیلی کوچک مشتق کراندار باشد، $f(x + \Delta x)$ را با تقریب خوبی بشکل

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x).\Delta x$$

بیان می کنیم. بوسیلهٔ این **فرمول تقریب مشتق** می توان تغییرات تابع را بازای تغییرات ناچیزی از متغیر مستقل بررسی نمود. مسلماً تغییرات تابع عبارتست از

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x).\Delta x$$

مثلاً اگر $f(x) = x^{۳} + ۱$ سپس تغییرات تقریبی Δy بر حسب Δx عبارتست از $\Delta y = ۳x^{۲}\Delta x$.

مثال ۲۸.۹ مقدار تقریبی $\sqrt{۲۴}$ را محاسبه کنید.

حل. با فرض $f(x) = \sqrt{x}$، $x = ۲۵$، $\Delta x = -۱$ و اینکه $f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$ و استفاده از فرمول تقریب مشتق داریم:

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &\approx f(x) + f'(x).\Delta x \\ \sqrt{۲۵ - ۱} &\approx \sqrt{۲۵} + \frac{۱}{۲\sqrt{۲۵}} \times -۱ \\ \sqrt{۲۴} &\approx ۵ - \frac{۱}{۱۰} = ۴/۹ \end{aligned}$$

برای تابع ضمنی $f(x,y) = ۰$ نیز مانند تابع صریح $y = f(x)$، اگر در نقطهٔ دلخواهی مانند $(x_{۰}, y_{۰})$ یکی از متغیرهای x یا y، نمو ناچیزی ($\Delta x \neq ۰$) داشته باشد، با استفاده از مشتق می‌توان میزان تغییرات دیگری را نیز بدست آورد.

مثال ۲۹.۹ در تابع $x^{۳} + y^{۳} = ۲xy$ اگر در $(-۱, -۱)$ میزان تغییرات x برابر $۰/۲$ باشد، میزان تغییرات y چقدر است؟

حل. می نویسیم $f(x,y) = x^{۳} + y^{۳} - ۲xy = ۰$ و با مشتقگیری ضمنی

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{۳x^{۲} - ۲y}{۳y^{۲} - ۲x} \Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{۳x^{۲} - ۲y}{۳y^{۲} - ۲x}\Big|_{(-۱,-۱)} \Longrightarrow \frac{\Delta y}{۰/۲} = -\frac{۵}{۵} = -۱$$

و لذا تغییرات y برابر $\Delta y = -۰/۲$ خواهد بود و منفی است.

مثال ۳۰.۹ بالونی کروی، مقدار ۱۹۰ متر مکعب از گاز را ظرف یک دقیقه از دست می‌دهد. وقتی شعاع بالون ۵ متر است، آهنگ تغییرات شعاع بالون چند سانتیمتر بر ثانیه خواهد بود؟

حل. از آنجا که تابع حجم بالون کروی بر حسب شعاع $V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ است تغییرات حجم $\Delta V = V'\Delta r = ۴\pi r^{۲}\Delta r$ بوده، در لحظهٔ $r = ۵m$ تغییرات شعاع بر حسب زمان برابرست با

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{۱}{۴\pi r^{۲}}\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{۱}{۴ \times ۳/۱۴۱۵ \times ۲۵ \times ۱۰^{۴} cm^{۲}} \times ۱۹۰\frac{۱۰^{۶} cm^{۳}}{۶۰ s} \approx ۱\frac{cm}{s}$$

مثال ۳۱.۹ (نامساوی برنولی) برای α−های حقیقی ثابت کنید $(۱+t)^{\alpha} \approx ۱ + \alpha t$.

حل. طبق فرمول تقریب مشتق $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x).\Delta x$ و با فرض $f(x) = x^{\alpha}$ می نویسیم:

$$(x+\Delta x)^{\alpha} \approx x^{\alpha} + \alpha x^{\alpha - ۱}.\Delta x$$

با در نظر گرفتن $x = ۱$ و $\Delta x = t$ نامساوی برنولی $(۱+t)^{\alpha} \approx ۱ + \alpha t$ بدست می آید.

۲.۳.۹ دیفرانسیل توابع

در حساب تفاضلات و مبحث مشتق، دیفرانسیل تنها تعبیر متفاوتی از مشتق بوده و در واقع همان قوانین مشتق برای آن بکار می رود. مانند پدیدآورندگان حساب دیفرانسیل و انتگرال — نیوتن و لایب نیتز — ما برای نماد مشتق همان نماد $\frac{dy}{dx}$ را بکار می بریم که d نماد دیفرانسیل بوده و منظور از dx تغییرات متغیر x است و آنرا دیفرانسیل x نامیم. برای تابع $y = f(x)$ دیفرانسیل را بصورت $dy = f'(x)dx$ تعریف می کنیم. مثلاً می نویسیم:

$$d(x^۳) = ۳x^۲\ dx$$

محاسبهٔ دیفرانسیل توابع مطابق قوانین مشتقگیری است. برای توابع مشتقپذیر f و g و اعداد حقیقی α و β دیفرانسیل مجموع، تفاضل، حاصلضرب و خارج قسمت چنین است:

$$d(\alpha f \pm \beta g) = \alpha df \pm \beta dg \quad , \quad d(fg) = df.g + f.dg \quad , \quad d\Big(\frac{f}{g}\Big) = \frac{df.g - f.dg}{g^۲}$$

دیفرانسیل چند تابع مختلف از u بر حسب x را در زیر بیان می کنیم:

$$u = x^r \implies du = rx^{r-۱}dx \tag{۲۸}$$

$$u = \sqrt{x} \implies du = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx \tag{۲۹}$$

$$u = \sqrt[n]{x^m} \implies du = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}dx \tag{۳۰}$$

$$u = \ln\ x \implies du = \frac{dx}{x} \tag{۳۱}$$

$$u = a^x \implies du = a^x \ln a dx \tag{۳۲}$$

$$u = e^{cx} \implies du = ce^{cx}dx \tag{۳۳}$$

$$u = \sin ax \implies du = a \cos ax dx \tag{۳۴}$$

$$u = \cos ax \implies du = -a \sin ax dx \tag{۳۵}$$

$$u = \tan ax \implies du = a(۱ + \tan^۲ ax)dx \tag{۳۶}$$

$$u = \arcsin x \implies du = \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^۲}} \tag{۳۷}$$

$$u = \arccos x \implies du = \frac{-dx}{\sqrt{۱ - x^۲}} \tag{۳۸}$$

$$u = \arctan x \implies du = \frac{dx}{۱ + x^۲} \tag{۳۹}$$

$$u = \sinh x \implies du = \cosh x dx \tag{۴۰}$$

$$u = \cosh x \implies du = \sinh x dx \tag{۴۱}$$

هنگامی که دو طرف یک تساوی توابعی صریح یا ضمنی باشند نیز قوانین دیفرانسیل معتبرند. به مثال های زیر توجه کنید.

$$\begin{aligned}
y = ۳x^۴ - ٦x + ۳ &\implies dy = (۱۲x^۳ - ٦)dx \\
u^۵ + ٦u - ۴ = \cos t &\implies (۵u^۴ + ٦)du = -\sin t\ dt \\
۳y^۲ = v \sin v &\implies ٦y dy = (\sin v + v \cos v)dv \\
\sqrt{y} = \cot\ u &\implies \frac{۱}{۲\sqrt{y}} dy = -(۱ + \cot^۲ u)du \\
\frac{۲y - ۱}{۳x + ۲} = ۲x + y &\implies \frac{۲dy(۳x + ۲) - ۳dx(۲y - ۱)}{(۳x + ۲)^۲} = ۲dx + dy \\
u\sqrt{y} + ye^u = ۲ &\implies du\sqrt{y} + u\frac{۱}{۲\sqrt{y}} dy + e^u dy + ye^u du = ۰
\end{aligned}$$

تمرین ۱۰.۹ .

۱) اگر $f(x) = ۳x^۲$ میزان تغییرات تقریبی Δy بر حسب Δx چقدر است؟

۲) در مربعی به ضلع ۴ متر وقتی ضلع مربع به اندازهٔ ۱ سانتیمتر تغییر کند میزان تغییرات مساحت مربع چقدر خواهد بود.

۳) مقدار تقریبی $\sqrt{۱۰}$، $\sqrt[۵]{۳۲/۰۱۵}$ و $\sin ۱۴۹^\circ$ را حساب کنید.

۴) می دانیم برای تقریب تابع در یک فاصلهٔ $(x - \Delta x, x + \Delta x,)$ می توان فرمول تقریب $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x).\Delta x$ استفاده کرد. مقدار خطای $e(f)$ حاصل از این تقریب حداکثر برابر $e(f) = \frac{۱}{۲} \max |f''|.|\Delta x|^۲$ است (به این شرط که مشتق دوم تابع f موجود باشد). ثابت کنید

$$\frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}} \sim ۱ + \frac{۱}{۲}x^۲$$

و حداکثر خطای حاصل از این تقریب را بیابید.

۵) دیفرانسیل های زیر را حساب کنید.

$$d\Big(\frac{۲x + ۴}{x^۲ - ۳}\Big) \ ,\ d\Big(\frac{\sqrt{x}}{۱ - \sqrt{x}}\Big) \ ,\ d\Big(\sin(\cos x)\Big) \ ,\ d\Big(\frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}\Big) \ ,\ d\Big(\frac{\sin x}{\sinh x}\Big)$$

٦) از طرفین تساوی های زیر دیفرانسیل بگیرید.

$$(a)\quad x^۲ + y^۲ = ۳x \ ,\ (b)\quad ۲u^۴ - e^u = x - ۳^x \ ,\ (c)\quad \ln(۱ + x) = x \ln y^۳$$

$$(d)\quad ye^u + ue^y = ۱ \ ,\ (e)\quad \frac{(y + x)^۵}{x} = \frac{y}{x - ۱} \ ,\ (f)\quad \sin(xy) + \frac{\tan x}{y} = y^۵$$

(شیمی) طبق قانون **بویل—ماریوت**، در حجم ثابت $\frac{P}{T} = k$ بوده که P فشار بر حسب اتمسفر و T دما بر حسب کلوین است. با دیفرانسیل گرفتن از طرفین داریم:

$$\frac{dP.T - dT.P}{T^{۲}} = ۰$$

و با این رابطه می توان تغییرات فشار و دما را نسبت به هم سنجید.

مثال ۳۲.۹ در دیگی با حجم ثابت، فشار درون آن در اثر دما افزایش یافته و دمای درون آن به ۶۰^{o} سلسیوس می رسد. اگر در لحظه‌ای که فشار درون دیگ برابر ۲۰ اتمسفر بوده، تغییرات لحظه‌ای دمای درون دیگ برابر ۲^{o} سلسیوس در ثانیه باشد، میزان تغییرات فشار چقدر است؟

حل. طبق قانون گازها در حجم ثابت $\frac{P}{T} = k$ بوده که P فشار بر حسب اتمسفر و T دما برحسب کلوین است. با دیفرانسیل گرفتن از طرفین داریم:

$$\frac{dP.T - dT.P}{T^{۲}} = ۰$$

و با جایگذاری مقادیر مسئله

$$\frac{dP.(۲۷۳+۶۰) - (۲۷۳+۲).(۲۰)}{(۲۷۳+۶۰)^{۲}} = ۰ \Longrightarrow dP = \frac{۲۷۵ \times ۲۰}{۳۳۳}.\frac{atm}{s} = ۱۶/۵\frac{atm}{s}$$

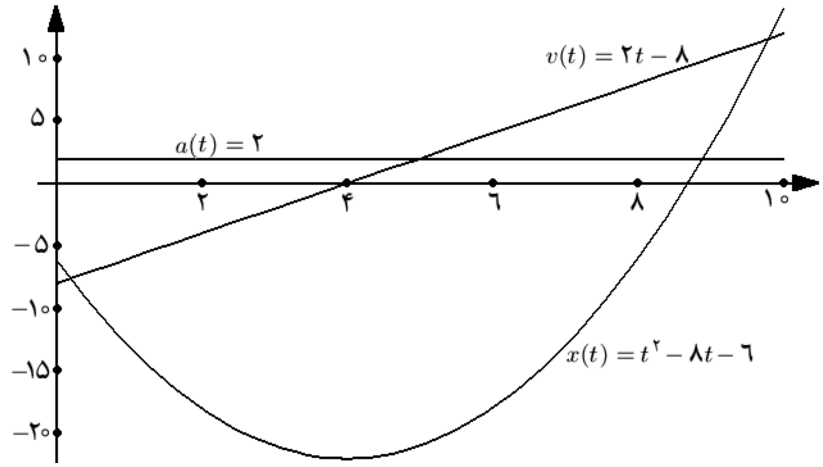
(فیزیک) فرض کنید متحرکی (ذره‌ای) روی محور طولها حرکت کرده و در زمان $t(s)$ در مکان $x(t)$ باشد که به آن **تابع مکان ذره** گویند. $x(۰)$ مکان اولیهٔ متحرک در زمان شروع حرکت $t = ۰$ است. مشتق تابع مکان ذره $x'(t)$ را با تابع $v(t)$ مشخص کرده و آنرا **سرعت متحرک** نامیم. اندازهٔ سرعت $|v|$ را تندی ذره نامیده و $v(۰)$ را سرعت اولیهٔ متحرک گوئیم. بهمین ترتیب مشتق سرعت $v'(t)$ را که برابر مشتق دوم تابع مکان $x''(t)$ است را **شتاب ذره** نامیده و آنرا با $a(t)$ نشان می دهیم. هرگاه شتاب متحرکی ثابت باشد گوئیم حرکت متحرک با شتاب ثابت است. اگر $a > ۰$ گوئیم **حرکت تندشونده** و اگر $a < ۰$ گوئیم **حرکت کندشونده** است.

مثال ۳۳.۹ تابع مکان ذره‌ای روی محور طولها با $x(t) = t^{۲} - ۸t - ۶$ مشخص شده است. موقعیت اولیهٔ ذره و همچنین سرعت، تندی و شتاب آنرا در لحظهٔ $t = ۳s$ پیدا کنید. نمودار مکان—زمان، سرعت—زمان و شتاب—زمان ذره را در صفحه مختصات رسم کنید.

حل.

مکان اولیه ذره	$x(۰) = -۶m$
سرعت ذره	$v(t) = x'(t) = ۲t - ۸\frac{m}{s}$
سرعت ذره در ثانیه سوم	$v(۳) = -۲\frac{m}{s}$
تندی ذره در ثانیه سوم	$\lvert v(۳)\rvert = ۲\frac{m}{s}$
شتاب ذره	$a(t) = v'(t) = ۲\frac{m}{s^{۲}}$

در اینجا اندازهٔ شتاب همواره برابر $a = ۲\frac{m}{s^۲}$ بوده و حرکت ذره با شتاب ثابت است. در این مثال می بینید که سرعت تا ثانیهٔ چهارم منفی است لذا در این چهار ثانیه ذره در خلاف جهت محور طولها حرکت کرده است.



شکل ۸.۹ نمودار مکان—زمان، سرعت—زمان و شتاب—زمان ذره در مثال ۳۳.۹

اکنون فرض کنید مکان (موضع) یک ذره در زمان t بشکل تابع پارامتری $f(t) = (x(t), y(t))$ در صفحهٔ xy باشد. در زمان $t = ۰$ مکان اولیهٔ ذره $f(۰)$ است. مقدار $|v| = \sqrt{(x')^۲ + (y')^۲}$ تندی ذره را در لحظهٔ $t(s)$ مشخص می کند. به همین ترتیب اندازهٔ مشتق دوم مکان که برابر $|a| = \sqrt{(x'')^۲ + (y'')^۲}$ است، اندازهٔ شتاب ذره را بیان خواهد کرد.

مثال ۳۴.۹ مکان ذره‌ای در صفحه با تابع $f(t) = (t^۲ - ۱, ۲t + ۱)$ مشخص شده است. موقعیت ذره و سرعت و شتاب آنرا در لحظهٔ $t = ۲s$ پیدا کنید.

حل.

مکان لحظه‌ای ذره	$f(t) = (t^۲ - ۱, ۲t + ۱)$
مکان ذره در ثانیه دوم	$f(۲) = (۳, ۵)$
تندی ذره در زمان t	$\lvert v(t)\rvert = \sqrt{(۲t)^۲ + (۲)^۲} = \sqrt{۴t^۲ + ۴} = ۲\sqrt{t^۲ + ۱}\frac{m}{s}$
تندی ذره در ثانیه دوم	$\lvert v(۲)\rvert = ۲\sqrt{۵}\frac{m}{s}$
اندازه شتاب ذره	$\lvert a(۲)\rvert = \sqrt{(۲)^۲ + (۰)^۲} = ۲$

در این مثال اندازهٔ شتاب همواره برابر $a = ۲\frac{m}{s^۲}$ بوده و در اینجا نیز حرکت ذره با شتاب ثابت است.

مثال ۳۵.۹ معادلات پارامتری حرکت پرتابه‌ای[3] که با سرعت $v_\circ$ و با زاویهٔ $\theta_\circ$ (نسبت به افق) پرتاب می شود عبارتست از

$$f(t) = (v_\circ \cos\theta_\circ t, v_\circ \sin\theta_\circ t - \frac{۱}{۲}gt^۲)$$

(الف) با حذف پارامتر t معادلهٔ صریح حرکت ذره را بنویسید (g شتاب جاذبهٔ زمین است).
(ب) نشان دهید پرتابه حداکثر تا نقطهٔ $\left(\frac{v_\circ^۲ \sin ۲\theta_\circ}{۲g}, \frac{v_\circ^۲ \sin^۲\theta_\circ}{۲g}\right)$ بالا می رود.
(ج) برد پرتابه — یعنی جائی که پرتابه به زمین می رسد تا نقطهٔ پرتاب — را بیابید.

حل. از آنجا که $\begin{cases} x = v_\circ \cos\theta_\circ t, \\ y = v_\circ \sin\theta_\circ t - \frac{۱}{۲}gt^۲. \end{cases}$ سپس پارامتر t در معادلهٔ نخست برابرست با $t = \frac{x}{v_\circ \cos\theta_\circ}$ و با جایگذاری در معادلهٔ دوم

$$y = v_\circ \sin\theta_\circ \frac{x}{v_\circ \cos\theta_\circ} - \frac{۱}{۲}g\left(\frac{x}{v_\circ \cos\theta_\circ}\right)^۲$$

یا

$$y = \left(\tan\theta_\circ\right)x - \left(\frac{g}{۲v_\circ^۲ \cos^۲\theta_\circ}\right)x^۲$$

معادلهٔ سهمی شکل پرتابه است. مشتق این معادله $y' = \tan\theta_\circ - \left(\frac{g}{v_\circ^۲ \cos^۲\theta_\circ}\right)x = \circ$ و $x = \frac{v_\circ^۲ \sin ۲\theta_\circ}{۲g}$ اکسترمم تابع است. از $y'' = -\left(\frac{g}{v_\circ^۲ \cos^۲\theta_\circ}\right) < \circ$ متوجه می شویم که این نقطهٔ اکسترمم، طول ماکزیمم پرتابه بوده و عرض آنرا **اوج** نامند، یعنی $H = \frac{v_\circ^۲ \sin^۲\theta_\circ}{۲g}$. برد پرتابه جائی است که $y = \circ$ بوده و بنابراین مقدار برد $R = \frac{v_\circ^۲ \sin ۲\theta_\circ}{g}$ را مشخص می کند.

مثال ۳۶.۹ بازیکنی توپی را با سرعت $۱\circ\frac{m}{s}$ و زاویهٔ $۳\circ^\circ$ شوت می کند. توپ تا چه ارتفاعی بالا رفته و پس از طی چه مسافتی بزمین می رسد.

حل. از مثال قبل می بایست اوج و برد پرتابه را یافته که با جایگذاری مفروضات داریم

$$H = \frac{v_\circ^۲ \sin^۲\theta_\circ}{۲g} = \frac{۲۵}{۲\circ} = ۱/۲۵m \quad , \quad R = \frac{v_\circ^۲ \sin ۲\theta_\circ}{g} = \frac{۸۵}{۱\circ} = ۸/۵m$$

مثال ۳۷.۹ معادله مسیر متحرکی بصورت $f(t) = (\sin t - ۲, ۲\cos t + ۱)$ است. حداکثر اندازهٔ شتاب متحرک چقدر است.

حل. حداکثر اندازهٔ شتاب متحرک عبارتست از

$$|a| = \sqrt{(x'')^۲ + (y'')^۲} = \sqrt{(-\sin t)^۲ + (-۲\cos t)^۲} = \sqrt{۱ + ۳\cos^۲ t} \leq ۲\frac{m}{s^۲}$$

---

[3] Projectile

(اقتصاد) فرض کنید شرکتی تولید کنندهٔ محصولی است که برای این محصول هزینه هائی را از قبیل مواد اولیه، دستمزدها، ماشین آلات و غیره را صرف تولید محصول نموده و آنها را تحت عنوان هزینهٔ تولید می نامیم. گیریم $C(x)$ **هزینه کل تولید** x واحد از محصول شرکت باشد که لزوماً $C(\circ) \geq \circ$ است زیرا تا هزینه نکنیم چیزی هم تولید نخواهد شد. با فرض $C(\circ) = \circ$ **هزینهٔ متوسط** هر واحد عبارتست از $A(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ چون

$$A(x) = \frac{\Delta C(x)}{\Delta x} = \frac{C(x) - C(\circ)}{x - \circ} = \frac{C(x)}{x}$$

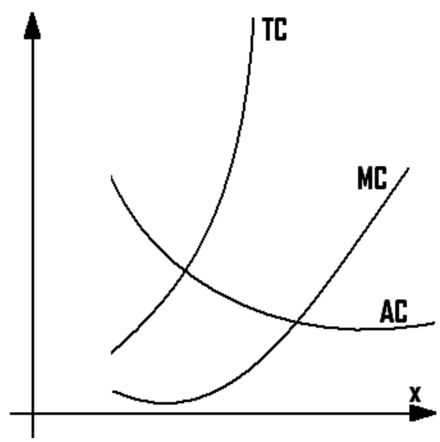
مقدار $C(\circ)$ را **هزینه اضافی تولید** نامند که همیشه صفر نیست. همچنین مقدار مشتق هزینه کل $C'(x)$ را (در صورت وجود مشتق) **هزینه نهائی تولید** و یا **هزینهٔ حاشیه‌ای** نامند. واضح است که هرچه تولید محصول بیشتر شود هزینه بالاتر خواهد رفت، بدین ترتیب $C(x)$ تابعی صعودی بوده و $C'(x) > \circ$ است. اگر x واحد از محصولی تولید شده و بخواهیم مقدار تغییر هزینه ها را بازای تولید Δx واحد تولید اضافی (کسری) بسنجیم، طبق فرمول تقریب مشتق داریم:

$$C(x + \Delta x) = C(x) + C'(x)\Delta x$$

بطورمعمول یافتن هزینه اضافی یک واحد از محصول مدنظر است. پس اگر سطح تولید محصول a باشد، با فرض $\Delta x = ۱$ مقدار افزایش هزینه بازای افزایش تولید یک واحد محصول برابر

$$C(a + ۱) - C(a) \approx C'(a)$$

است. اقتصاددانان این مطلب را چنین تعبیر می کنند که هزینه نهائی برابر با هزینه تقریبی یک واحد اضافی از محصول است. هزینهٔ نهائی را گاهی با $M(x)$ نشان داده و منحنی هزینه کل TC، منحنی هزینه متوسط AC و منحنی هزینه نهائی MC در شکل ۹.۹ آمده است.



شکل ۹.۹ منحنی هزینه کل، هزینه متوسط و هزینه نهائی

مثال ۳۸.۹ فرض کنید تابع هزینهٔ تولید x واحد بلبرینگ $C(x) = ۰/۰۰۸x^۳ - ۰/۲x^۲ + x$ هزار تومان بوده و سطح تولید روزانه ۱۰۰ واحد باشد.

(الف) هزینهٔ متوسط تولید روزانه چقدر است؟

(ب) هزینهٔ افزایش تولید از ۱۰۰ واحد به ۱۰۱ واحد در روز چقدر است؟

(ج) هزینهٔ نهائی در این سطح تولید چه مقدار است؟

حل. (الف) هزینه متوسط تولید برابر $A(x) = \frac{C(x)}{x} = ۰/۰۰۸x^۲ - ۰/۲x + ۱$ است که بازای $x = ۱۰۰$ واحد هزینه متوسط تولید روزانه ۶۱ هزار تومان است. (ب) هزینهٔ افزایش تولید از ۱۰۰ واحد به ۱۰۱ واحد در روز عبارت از

$$C(۱۰۱) - C(۱۰۰) = ۶۳۰۳/۲۱ - ۶۱۰۰ = ۲۰۳/۲۱$$

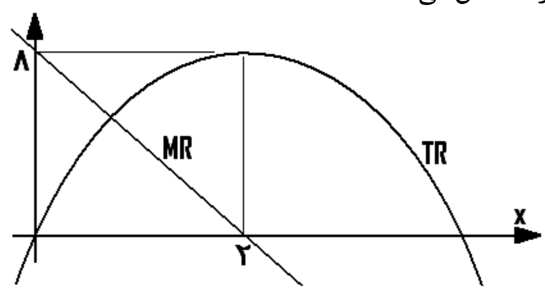
هزار تومان است. (ج) چون $C'(x) = ۰/۰۲۴x^۲ - ۰/۴x + ۱$ هزینهٔ نهائی در سطح تولید روزانه ۱۰۰ واحد ۲۰۱ هزار تومان است که با هزینهٔ افزایش تولید از ۱۰۰ واحد به ۱۰۱ واحد در روز مقداری تفاوت دارد.

از طرفی درآمد حاصل از فروش محصول تولید شده، می بایست هزینه ها را جبران نماید. تابع $R(x)$ را **تابع درآمد کل** حاصل از تولید x واحد از محصول نامند و مشتق تابع درآمد کل یعنی $R'(x)$ **تابع درآمد نهائی** یا **تابع درآمد حاشیه‌ای** نامیده می شود. مسلماً $R(x) > ۰$ بوده و نمودار تابع درآمد کل را منحنی درآمد کل TR و نمودار تابع درآمد نهائی را منحنی درآمد نهائی MR گویند.

طبق قوانین اقتصاد بازار هرگاه عرضهٔ کالائی زیاد شود تقاضای مشتریان کم شده و هرگاه عرضه کم شود تقاضا بیشتر خواهد شد، بخصوص اگر تولید کالا در دست موسسه‌ای انحصاری باشد (یعنی تنها تولید کنندهٔ یک کالا یا تنها ارائه دهنده یک نوع خدمات باشد). متناسب با این موضوع در خیلی از حالات قیمت اجناس ثابت نخواهد بود مگر آنکه رقابت آن قلم در بازار کم باشد. بنابراین قیمت کالا p تابعی از عرضهٔ تعداد کالا x خواهد بود و می توان آنرا بشکل $p = f(x)$ نوشت که به این معادله، **معادلهٔ تقاضا** گویند. دراینحال درآمد کل حاصل از فروش x واحد کالا برابرست با $R(x) = xp$ و برای تمام تولید کنندگان صادق خواهد بود. منحنی تابع $p = f(x)$ بعنوان منحنی تقاضا شناخته شده و در درک روند فروش محصول در بازار کمک فراوانی نموده می نماید. توضیح اینکه معادلهٔ تقاضا در اکثر موارد بصورت تابعی ضمنی در معادلات و الگوهای اقتصادی ظاهر می شود.

مثال ۳۹.۹ معادلهٔ تقاضای محصولی عبارتست از $p = ۸ - ۲x$ سطح تولید را چنان بیابید که درآمد ماکزیمم شود. منحنی درآمد کل و منحنی درآمد نهائی را رسم نمائید.

حل. تابع درآمد برابر $R(x) = xp = 8x - 2x^2$ و درآمد نهائی $R'(x) = 8 - 4x$ است و وقتی بیشترین مقدار است که $x = 2$ شود زیرا $R''(x) < 0$. لازم است تصریح شود که برای درآمد مثبت می بایست $R(x) > 0$ شود تا تولید بصرفه شود که بدین جهت می بایست $x \in [0, 4]$ باشد. مقدار درآمد ماکزیمم نیز بازای $x = 2$ برابر $R(2) = 8$ است. شکل زیر وضعیت را بهتر مشخص می کند.



شکل ۱۰.۹ منحنی درآمد کل و منحنی درآمد نهائی

کل سودی که یک شرکت از صرف هزینهٔ $C(x)$ و کسب درآمد $R(x)$ از x واحد محصول، عایدش می شود را با

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

نشان داده و آنرا **تابع سود کل** نامند. مشتق این تابع $P'(x) = R'(x) - C'(x)$ را **تابع سود نهائی** یا **تابع سود حاشیه‌ای** نامند، یعنی سود نهائی برابر درآمد نهائی منهای هزینهٔ نهائی است. در سطح تولید محصول a، مقدار افزایش سود بازای افزایش تولید یک واحد محصول برابر

$$P(a+1) - P(a) \approx P'(a)$$

است. برای برداشت حداکثر سود باید $P'(x) = 0$ باشد یعنی $R'(x) = C'(x)$ و بنابراین سود در سطحی از تولید حداکثر است که درآمد نهائی برابر هزینهٔ نهائی باشد.

مثال ۴۰.۹ معادلهٔ تقاضای محصولی $p = 310 - 0/02x$ بوده و کارخانه با صرف هزینهٔ روزانهٔ صد هزارتومان، هر کالا را با هزینهٔ ۱۰۰ تومان تولید می کند. اگر دولت بازای هر واحد تولید کارخانه مبلغ ۱۰ تومان مالیات اخذ نماید، در چه واحدی از تولید روزانه و فروش چه بهائی برای هر واحد کالا، سود ماکزیمم حاصل می شود؟

حل. از مفروضات مسئله چنین برداشت می کنیم که

$$\begin{aligned} R(x) &= xp = 310x - 0/02x^2 \quad \text{تومان} \quad ; \quad 0 \le x \le 15500 \\ C(x) &= (100x + 100000) + 10x \ \text{تومان} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ P(x) &= ۳۱۰x - ۰/۰۲x^{۲} - ۱۰۰x - ۱۰۰۰۰۰ - ۱۰x \\ &= ۲۰۰x - ۰/۰۲x^{۲} - ۱۰۰۰۰۰ \text{ تومان} \end{aligned}$$

برای سود ماکزیمم می بایست $P'(x) = ۲۰۰ - ۰/۰۴x = ۰$ که $x = ۵۰۰۰$ و از اینکه $P'' < ۰$ است، مقدار $x = ۵۰۰۰$ واحد تولید روزانه، ماکزیمم تولید بوده و بهای هر واحد

$$p = ۳۱۰ - ۰/۰۲(۵۰۰۰) = ۲۱۰$$

تومان است. سودی که روزانه عاید کارخانه می شود برابر

$$P(۵۰۰۰) = ۲۰۰(۵۰۰۰) - ۰/۰۲(۵۰۰۰)^{۲} - ۱۰۰۰۰۰ = ۴۰۰۰۰۰$$

تومان است. در نتیجه اگر در سطح تولید روزانه ۵ هزار واحد و هر واحد بمبلغ ۲۱۰ تومان فروخته شود، روزانه سودی برابر ۴۰۰ هزار تومان نصیب کارخانه خواهد شد.

۳.۳.۹ محاسبات خطا در علوم کاربردی

در علوم عملیاتی وقتی بحث از اندازه گیری یک کمیت است خطای ناشی از وسایل اندازه گیری، محیط کار و غیره باعث سنجش تقریبی کمیت می شود. مثلاً با وجود اینکه مقدار جذر عدد ۲ را می توان دقیقاً $\sqrt{۲}$ نامید عملاً در محاسبه با ماشین حساب این مقدار ۱/۱۴ خواهد بود. این مقدار خطای حاصل در اندازه گیری و سنجش کمیتها می بایست لحاظ گردد. اختلاف مقدار حقیقی یک کمیت $G_۰$ و مقدار اندازه گیری شدهٔ آن G_m را **بیراهی مطلق** نامند. **خطای مطلق** δG عبارتست از ماکزیمم بیراهی مطلق. **بیراهی نسبی** نیز برابر $\frac{|G_۰ - G_m|}{G_۰}$ است که **خطای نسبی** $\frac{\delta G}{G_۰}$ را بدست می دهد.

مثال ۴۱.۹ سنجش با کولیسی با گام $\frac{۱}{۵۰}$ با تقریب $\frac{۱}{۵۰}mm$ انجام می شود. از اندازه گیری با این کولیس قطر ساچمه‌ای $d = (۱۰/۰۲ \pm ۰/۰۲)mm$ و شعاع $r = (۵/۰۱ \pm ۰/۰۱)mm$ برآورد می شود در نتیجه $\frac{\delta r}{r} = ۲ \times ۱۰^{-۳}$. برای محاسبه خطای حجمی ساچمه از رابطهٔ $V = \pi r^{۳}$ و از آنجا که π عددی گنگ است، در محاسبه دارای خطاست. با دیفرانسیل داریم:

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta \pi}{\pi} + ۳\frac{\delta r}{r}$$

برای اینکه خطای جملهٔ $\frac{\delta\pi}{\pi}$ از جملهٔ $۳\frac{\delta r}{r}$ کمتر شود می بایست $\frac{\delta\pi}{\pi} \ll ۳\frac{\delta r}{r} = ٦ \times ۱۰^{-۳}$ که نشان می دهد کافیست برای عدد π چهار رقم ۳/۱۴۱ را اختیار کنیم. بدین ترتیب داریم

$$\frac{\delta V}{V} = ۳\frac{\delta r}{r} = ٦ \times ۱۰^{-۳}$$

با $\pi = ۳/۱۴۱$ و $r = ۵/۰۱$ حجم ساچمه برابر $V = ۵۲۶/۶۴۷۲۸mm^۳$ است که دارای خطای $\delta V = ۶ \times ۱۰^{-۳} V = ۳/۱۶mm^۳$ می باشد.

از مثال ۳۱.۹ که $(۱+\varepsilon)^n \approx ۱ + n\varepsilon$ می توان فرمولهای تقریب زیر را برای ε و $\hat{\varepsilon}$ کوچک نتیجه گرفت. از این فرمولها برای محاسبات سریع می توان بهره گرفت.

$$\begin{array}{cc}
\frac{۱}{۱-\varepsilon} \approx ۱ + \varepsilon & (۱+\varepsilon)^۲ \approx ۱ + ۲\varepsilon \\
\frac{۱}{\sqrt{۱+\varepsilon}} \approx ۱ - \frac{۱}{۲}\varepsilon & (۱-\varepsilon)^۲ \approx ۱ - ۲\varepsilon \\
\frac{۱}{\sqrt{۱-\varepsilon}} \approx ۱ + \frac{۱}{۲}\varepsilon & \sqrt{۱+\varepsilon} \approx ۱ + \frac{۱}{۲}\varepsilon \\
\frac{۱+\varepsilon}{۱+\hat{\varepsilon}} \approx ۱ + \varepsilon - \hat{\varepsilon} & \frac{۱}{۱+\varepsilon} \approx ۱ - \varepsilon
\end{array}$$

مثال ۴۲.۹ مقدار تقریبی $\cos(x+\varepsilon)$ را بازای مقدار ε کوچک تقریب بزنید.

حل. از فرمول حاصلجمع دو کمان داریم:

$$\cos(x+\varepsilon) = \cos x \cos \varepsilon - \sin x \sin \varepsilon$$

از تقریب $\cos \varepsilon \approx ۱$ و $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$ نتیجه می گیریم $\cos(x+\varepsilon) = \cos x - \varepsilon \sin x$ که از فرمول تقریب مشتق نیز نتیجه می شود.

تمرین ۱۱.۹ تکمیلی.

۱) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = x^۳ + x + ۱$ را بدست آورید.

۲) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sin x$ را بدست آورید.

۳) مشتق تابع زیر را در $x = ۰$ بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ \sin \frac{۱}{x} & , \quad x \neq ۰ \text{ اگر} \\ ۰ & , \quad x = ۰ \text{ اگر} \end{cases}$$

۴) مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع زیر در $x = \pi$ مشتقپذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + a \cos x & , \quad x \geq \pi \text{ اگر} \\ \cos x - b \sin x & , \quad x < \pi \text{ اگر} \end{cases}$$

۵) مقدار $a - b$ را چنان بیابید که در تابع زیر $f'(۲)$ موجود باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ - ۱ & , x \geq ۲ \text{ اگر} \\ ax + b & , x < ۲ \text{ اگر} \end{cases}$$

۶) با استفاده از فرمولهای مشتق، مشتق توابع زیر را حساب کنید.

(۱) $y=(x^{۳}-۱)(x^{۳}+۱)$, (۲) $y=x^{۴}-x^{-۴}+۱$

(۳) $y=x^{۳}+۲x-x+\ln x$, (۴) $y=(x+۳)^{۳}-(e^{x}-۱)^{۴}$

(۵) $y=\left(\ln ۲x+\ln\frac{۱}{x}\right)^{۶}$, (۶) $y=(x^{۳}-x^{-۳})^{۲}$

(۷) $y=(e^{x}+e^{۲x}+e^{۳x})^{۴}$, (۸) $y=\sqrt[۳]{e^{x}-x+۱}$

(۹) $y=e^{x^{۳}+x^{۲}}-e^{x-\ln x}$, (۱۰) $y=\sqrt[۵]{(x^{۲}-x+۱)^{۳}}$

(۱۱) $y=\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x^{۴}}$, (۱۲) $y=(e^{x}-۱)^{۵}+۵e^{\ln(x^{۲}-۱)}$

(۱۳) $y=x^{۴}+\frac{۱}{x^{۴}}-۲$, (۱۴) $y=x^{۵}+\frac{۶}{x^{۹}}+\frac{۳}{x^{۲}}$

(۱۵) $y=\frac{۳}{x^{۵}}-\frac{۱}{x^{۳}}+\frac{۱}{x}$, (۱۶) $y=\frac{۲}{e^{۹x}}-\frac{۳}{e^{x}}$

(۱۷) $y=\ln^{۳}(x^{۵}-x^{۴})$, (۱۸) $y=x^{e}-۳\sqrt[۳]{x^{۳}+۳}$

(۱۹) $y=\sqrt[۴]{\ln x-\ln^{۲}x}$, (۲۰) $y=۲\sqrt{x}-۳\sqrt[۵]{x^{۳}}-\sqrt[۹]{x^{۲}}$

(۲۱) $y=۴\tan ۶x-۶\cot ۴x$, (۲۲) $y=\sqrt[۳]{e^{۲x}+x}+\sqrt[۴]{\ln^{۳}(x^{۶}+x)}$

(۲۳) $y=۵\sin ۴x+۲\cos ۳x$, (۲۴) $y=\sqrt[۵]{\left(e^{x^{۲}+۱}-\ln(x^{۳}+x)-۴\right)^{۴}}$

(۲۵) $y=\sin(x^{۲}+x)-\tan(x^{۲})$, (۲۶) $y=\sqrt[۵]{x^{۴}}\sqrt[۳]{x^{۲}}+\frac{\sqrt[۶]{x^{۵}}}{\sqrt[۵]{x^{۳}}}+\frac{۵}{\sqrt[۸]{x^{۵}}}$

(۲۷) $y=\sin x^{۴}+\sin^{۴}x$, (۲۸) $y=\tan^{۵}x+\cot(۴x-۱)$

(۲۹) $y=\sin^{۶}(x^{۲}-x)-\tan^{۷}x$, (۳۰) $y=۴\sin^{۶}۴x+۲\cos^{۵}۳x$

(۳۱) $y=۴\tan^{۶}۲x-۴\cot^{۲}۴x$, (۳۲) $y=\sin\sqrt{x}+۲\cos\sqrt[۵]{x^{۳}}$

(۳۳) $y=(x^{۳}-x^{۲})^{۸}$, (۳۴) $y=(e^{x}+x)(e^{۳x}-۳x)$

(۳۵) $y=\frac{x^{۴}-۲^{x}}{x^{۵}+e^{x}}$, (۳۶) $y=\frac{x^{۵}+۱}{x^{۵}-۱}-\frac{۴}{x^{۳}-۳^{x}}$

(۳۷) $y=x^{۵}\left(\frac{x+۱۱}{x^{۴}-۱}\right)$, (۳۸) $y=\left(\frac{e^{x}+۲}{e^{۹x}-۱}\right)\left(۴x^{۳}-\frac{۳^{x}-۱}{e^{x}}\right)$

(۳۹) $y=(x^{۴}+\ln x)^{۹}$, (۴۰) $y=\sin\sqrt{x}+\sqrt{\sin^{۲}x-۳}$

(۴۱) $y=(x^{۵}-۱)^{۴}(x^{۳}+۱)^{۲}$, (۴۲) $y=\sqrt{\tan^{۳}x+۱}$

(۴۳) $y=x^{x^{۴}+۱}$, (۴۴) $y=\sqrt[۷]{x-۱}.\sqrt{\tan x-۱}^{۳}$

(۴۵) $y=(\sin x)^{\sin x}$, (۴۶) $y=\left(\frac{۱}{\sin x+\cos x}\right)^{۳}(\tan x+۱)^{۲}$

(۴۷) $y=\cos ۲x\left(\frac{x+۱}{۳x+۲}\right)$, (۴۸) $y=\sqrt{e^{x}+x^{e}}+\sqrt[۴]{\ln^{۳}(x+e)}$

(۴۹) $y = (x+4)^4(8x-5)^5$, (۵۰) $y = \dfrac{1}{\sin x} + \tan^5 x$

(۵۱) $y = \left(\dfrac{2x-4}{3x-5}\right)^2$, (۵۲) $y = (x-9)^{\frac{1}{2}} x^5$

(۵۳) $y = \sqrt{\sin^2 x - 3}$, (۵۴) $y = (\arcsin x)\ln(x\sin x - \cos x)$

(۵۵) $y = 2xe^x \sinh x$, (۵۶) $\sin(xy) + \cos(x^2 y) = \tan(x+y)$

(۵۷) $y = x^{x^x}$, (۵۸) $y = \ln(\cos \dfrac{1}{\sqrt{x}})$

(۵۹) $y = \tan(\tan(\tan 2x))$, (۶۰) $x^4 + y^4 - 4xy = 1$

(۶۱) $y = \left(\dfrac{\sin x - 1}{\tan x - 1}\right)^3$, (۶۲) $y = \sin\left(\sqrt{\dfrac{\cos x + 1}{\cos x - 1}}\right)$

(۶۳) $y = \sqrt[4]{\dfrac{\cos 2x - 4}{\sin 3x + 5x}}$, (۶۴) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x}}}}$

(۶۵) $\sqrt{xy} + x^2 y^3 = y$, (۶۶) $x^2 \sin y + y^2 \cos x = xy$

(۶۷) $y = (\tan 2x)^{\ln(\cos x)}$, (۶۸) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1$

(۶۹) $y = (x^2+1)^3(e^x + x)^4$, (۷۰) $y = \dfrac{\ln x + x^2}{e^x - \ln x}$

(۷۱) $y = (e^x + \ln x)^5$, (۷۲) $y = \arctan(x^x)$

(۷۳) $y = (e^x - 1)^x$, (۷۴) $y = \sqrt[4]{x^x} + \sqrt[4]{x^{2x}} + \sqrt[4]{x^{3x}}$

(۷۵) $y = \sqrt[\cos x]{x^{\sin x}}$, (۷۶) $y = \dfrac{\sin x + \cos x + 1}{\tan x - x}$

(۷۷) $y = \tan^2 x + \arcsin x$, (۷۸) $y = 3\sec 2x + 4\csc 3x$

(۷۹) $y = \arccos(\sec 3x + 1)$, (۸۰) $y = \cosh 3x - \tanh(\sin x - 1)$

(۸۱) $y = \sqrt[3]{\sinh x + \cosh x}$, (۸۲) $y = (2\sinh x - e^x)^4$

(۸۳) $y = \sqrt[x]{\arcsin x}$, (۸۴) $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x\sin x + \cos x}}$

(۸۵) $y = \sinh(e^x - e^{-x})$, (۸۶) $y = \sin(\cos(\tan x))$

(۸۷) $y = 2^{\sin 3x} + \ln(\tan x)$, (۸۸) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

(۸۹) $y = \arctan 2x - \arctan x^2$, (۹۰) $y = \tan(\sin 3x) - 2\cos^3(x^4)$

(۹۱) $y = \sqrt[4]{\sinh 2x}$, (۹۲) $y = \sqrt{\cos\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$

(۹۳) $y = \dfrac{x\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sin x}$, (۹۴) $y = \ln(\cos \dfrac{1}{\sqrt{x}})$

(۹۵) $y = \cosh^2 x - \sinh^2 x$, (۹۶) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}}$

۷) مقدار مشتق توابع زیر را در $x = ۱$ بدست آورید.

$$(a)\quad y = (x^۳ - x + ۱)(x^۲ - ۱) \quad , \quad (b)\quad y = \ln(x^۳ + ۱)$$
$$(c)\quad y = ۲\ln(x^۳ + ۱) \quad , \quad (d)\quad y = \pi x + e^{\pi x + \sin \pi x - ۱}$$
$$(e)\quad y = e^{x^۴ - ۲x^۲ + ۱} \quad , \quad (f)\quad y = \left(\frac{\sin \pi x - ۱}{\tan \pi x - ۱}\right)^۳$$

۸) مقدار مشتق توابع زیر را در $x = ۰$ بیابید.

$$(a)\quad y = \sqrt{x^۳ - x + ۱} + x^۲ + ۱ \quad , \quad (b)\quad y = ۳\ln^۲(x^۳ + ۱) \quad , \quad (c)\quad y = ۴e^{-x^۳ + ۱}$$

۹) مشتق دوم تابع $y = \dfrac{\tan x - ۱}{\tan x + ۱}$ را در $x = \dfrac{\pi}{۴}$ پیدا کنید.

۱۰) مشتق دوم تابع $y = \dfrac{۲\sin x}{۱ - \cos x}$ را در $x = \pi$ پیدا کنید.

۱۱) مشتق دوم تابع $\cos^۳(\sin ۳x)$ را بیابید.

۱۲) نشان دهید تابع $y = |\sin x|$ در مبداء مشتقپذیر نیست.

۱۳) فرمولی برای مشتق تابع $y = |x|$ بیان نمائید.

۱۴) با استفاده از فرمولهای مشتق، فرمولهائی برای مشتق توابع سکانت و کسکانت بیان کنید.

۱۵) مقدار مشتق تابع $y = ۳^{\sin ۲x} + \ln(\tan x)$ را در $x = \dfrac{\pi}{۴}$ بدست آورید.

۱۶) مشتق ضمنی تابع $۳x^۳ + ۳\sin y = ۴y - ۲\pi$ را در نقطهٔ $(-۱, \dfrac{\pi}{۲})$ بیابید.

۱۷) اگر $x^۴ + y^۴ = ۸xy + ۱$ نشان دهید $x'(۱) = ۲$.

۱۸) قاعده‌ای برای مشتق n–ام هر یک از توابع زیر پیدا کنید.

$$f(x) = x^۴ \quad , \quad g(x) = e^{۲x} \quad , \quad h(x) = (x+۱)e^x \quad , \quad i(x) = \sin x \quad , \quad j(x) = \frac{۱}{x^۲ - ۱}$$

۱۹) مشتق n–ام تابع $y = \dfrac{۱}{۱ - x}$ را بیابید و سپس مقدار $y^{(۱۰۰)}(۰)$ را حساب کنید.

۲۰) معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع $y = x^۴ - ۶x^۲ + ۳$ را بیابید که شیبی برابر $\dfrac{۱}{۸}$ دارد.

۲۱) معادلهٔ خط مماس و قائم بر منحنی $y = ۲\sqrt[۳]{x - ۱} + ۳$ را در $(۱, ۳)$ بیابید.

۲۲) معادلهٔ مماس بر منحنی $y = \sqrt{x - ۱} + ۶$ که عمود بر خط $x + ۲y + ۴ = ۰$ است را پیدا کنید.

۲۳) خطوط مماس و قائم بر منحنی $۲x\sin y + y\cos x = ۲y$ را درنقطهٔ $(\dfrac{\pi}{۲}, \dfrac{\pi}{۲})$ بنویسید.

۲۴) آیا مشتق تابع صعودی، تابعی صعودی است؟

۲۵) در چه نقاطی خط $y = \frac{1}{2}x$ بر تابع $y = \arctan x$ مماس است؟

۲۶) نشان دهید تابع $y = x^3 - 6x^2 + 18x - 20$ اکسترمم نسبی ندارد.

۲۷) نقاط بحرانی توابع زیر را در بازهٔ داده شده مشخص کنید.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4} \ ; \ [-1, 1] \quad , \quad g(x) = x^4 - 8x^2 + 10 \ ; \ [-3, 3]$$

$$h(x) = x^2 - 4x + 6 \ ; \ [-3, 10] \quad , \quad i(x) = |x^2 - 3x + 2| \ ; \ (-10, 10]$$

$$j(x) = \sin 2x - 1 \ ; \ [-\pi, \pi] \quad , \quad k(x) = \sqrt{5 - 4x} \ ; \ [-1, 1]$$

$$l(x) = \frac{1}{2x - 1} \ ; \ (-1, 2] \quad , \quad m(x) = 3\cos x \ ; \ (-\pi, \pi]$$

$$n(x) = |x^2 - 1| \ ; \ x \in \mathbb{R} \quad , \quad o(x) = [x]^2 - 1 \ ; \ [-2, 1]$$

۲۸) نقاط عطف توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x \ , \ \ g(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \ , \ \ h(x) = \ln(1+x^2) \ , \ \ i(x) = x \arctan x$$

۲۹) نشان دهید نقطهٔ عطف تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ نقطه‌ای بطول $x = -\frac{b}{3a}$ و مرکز تقارن آنست.

۳۰) توابع زیر را رسم کنید.

$$(a) \quad y = 2x^4 - 16x^2 + 10 \ , \quad (b) \quad y = \frac{1}{1 + x^2} \quad , \quad (c) \quad y = x^3 - 8x^2 + 10$$

$$(d) \quad y = \frac{2x^2 - 2x + 3}{x^2 - x} \quad , \quad (e) \quad y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} \quad , \quad (f) \quad y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x - 4}$$

$$(g) \quad y = x\sqrt{1 - x^2} \quad , \quad (h) \quad y = x + \frac{4}{x} \quad , \quad (i) \quad y = x - 2 + \frac{1}{x + 2}$$

$$(j) \quad y = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 5x + 4} \quad , \quad (k) \quad y = 2\sin x - 1; \quad x \in [0, 2\pi]$$

۳۱) اگر $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ مقادیر a، b و c را بیابید چنانکه f در $(1, 2)$ نقطهٔ عطف داشته و شیب مماس در این نقطه -2 شود.

۳۲) اگر $y = ax^4 + bx^2 + c$ سپس مقادیر a، b و c را چنان بیابید که تابع در نقطهٔ $(1, \frac{16}{9})$ اکسترمم داشته و $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 3)$ نقطهٔ عطف تابع باشد.

۳۳) تابعی مثال بزنید که مطابق مطلب ۵.۹ در نقطه‌ای از آن مشتق وجود نداشته باشد ولی آن نقطه اکسترمم باشد. تابعی مثال بزنید که در نقطه‌ای از آن مشتق صفر شود ولی تغییر علامتی در مشتق انجام نگیرد.

۳۴) مشتق اول و دوم توابع پارامتری زیر را در نقاط داده شده پیدا نمائید.

$$(a)\quad \begin{cases} x = ۱ + ۲\sin t \\ y = ۳ - ۲\cos t \end{cases} \quad ; \quad t = \pi \qquad (b)\quad \begin{cases} x = ۵^t + ۵^{-t} \\ y = ۵^t - ۵^{-t} \end{cases} \quad ; \quad t = ۰$$

$$(c)\quad \begin{cases} x = \dfrac{۲t}{۱ + t^۲} \\ y = \dfrac{۱ - t^۲}{۱ + t^۲} \end{cases} \quad ; \quad t = ۱ \qquad (d)\quad \begin{cases} x = e^{۲t}\cos t \\ y = e^{۲t}\sin t \end{cases} \quad ; \quad t = ۰$$

۳۵) حدود زیر را محاسبه کنید.

$$(a)\quad \lim_{x\to ۱} \frac{x^m - ۱}{x^n - ۱} \quad , \quad (b)\quad \lim_{x\to ۰} \frac{a^x - ۱}{x} \quad , \quad (c)\quad \lim_{x\to ۰} \frac{(۱ + x)^r - ۱}{x}$$

$$(d)\quad \lim_{x\to ۰} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^۳ x} \quad , \quad (e)\quad \lim_{x\to ۰} \frac{۳^x - ۱}{\sqrt{۱ + x} - ۱} \quad , \quad (f)\quad \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\tan x)^{\tan ۲x}$$

$$(g)\quad \lim_{x\to -\infty} x \ln \frac{x + ۱۰}{x + ۵} \quad , \quad (h)\quad \lim_{x\to \infty} (۱ + \frac{۱}{x})^{(۱+\frac{۱}{x})} \quad , \quad (i)\quad \lim_{x\to ۰} \frac{۱}{\sin x} - \frac{۱}{x}$$

۳۶) با استفاده از اکسترمم توابع ثابت کنید $|a\sin x + b\cos x| \leq \sqrt{a^۲ + b^۲}$.

۳۷) با استفاده از فرمول تقریب مشتق، مقدار تقریبی $\tan ۴۶^o$ و $\cos ۵۹^o$ و $\sqrt[۴]{۸۰}$ محاسبه کنید.

۳۸) نشان دهید معادلهٔ $x^۵ + x^۳ + x + ۱ = ۰$ دقیقاً یک ریشه دارد.

۳۹) نشان دهید معادلهٔ $x^۶ + ۳x - ۷ = ۰$ بیش از دو ریشهٔ حقیقی ندارد.

۴۰) نقطه‌ای بر سهمی $y = x^۲ - ۲$ بیابید که تا نقطهٔ $(۳, -۲)$ کمترین فاصله را داشته باشد.

۴۱) نقطه‌ای بر خط $۲x + ۳y = ۶$ بیابید که کمترین فاصله را از مبداء داشته باشد. نشان دهید فاصلهٔ این نقطه تا مبداء برابر $\frac{۶\sqrt{۱۳}}{۱۳}$ است.

۴۲) نقطه‌ای بر منحنی $x^۳ + y^۲ - x = ۳$ بیابید که کمترین فاصله را از مبداء داشته باشد. نشان دهید فاصلهٔ این نقطه تا مبداء برابر $\frac{\sqrt{۲۶}}{۳}$ است.

۴۳) مثلث قائم الزاویه‌ای با بیشترین مساحت بیابید که مجموع یک ضلع و وترش ثابت باشد.

۴۴) کوتاهترین فاصلهٔ نقطهٔ $P = (۳, \frac{۱}{۲})$ تا نقطه‌ای بر سهمی $y = ۲x^۲ - ۱$ را یافته و نقطه‌ای از این سهمی بیابید که به P نزدیکترین باشد.

۴۵) در یک کره با شعاع ثابت R استوانه ای با بیشترین حجم محاط کنید.

۴۶) ثابت کنید تفاضل جذر دو عدد صحیح متوالی بیش از ۲۵، از ۰/۱ کمتر است.

۴۷) یک بالون در حال باد شدن، در هر ثانیه افزایش حجمی به میزان ۴ متر مکعب دارد. هنگامی که قطر آن ۱۰ متر است میزان تغییرات حجم آن چه مقدار است؟

۴۸) کره ای فلزی توپری به شعاع ۱۰ سانتیمتر را گرم کرده و شعاع کره با آهنگ رشد $1\frac{\mu m}{s}$ زیاد می شود. آهنگ رشد حجم کره چند سانتیمتر مکعب بر ثانیه است؟

۴۹) در مثلث متساوی الاضلاعی، سه ضلع با هم و به نسبتهای مساوی کوچک می شوند اگر هنگامی که ضلع مثلث a است میزان تغییرات ضلع δ باشد مقدار تغییرات مساحت چقدر خواهد بود.

۵۰) با استفاده از فرمول تقریب مشتق نشان دهید برای ε کوچک می توان تقریب زیر را بدست آورد:
$$e^{\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon$$

۵۱) **(زیست)** در واکنش بدن قورباغه به داروها، مقداری محلول استیل کولین[۴] به ماهیچهٔ قلب یک قورباغه وارد شده و نیروی منقبض کنندهٔ ماهیچه ها از بین می رود. داده‌های حاصل از آزمایشات ا.جی.کلارک[۵] نشان می دهد که بازای غلظت x از استیل کولین (برحسب واحد) می توان مقدار ماکزیمم درصدی برای تاثیر این ماده بر ماهیچه بشکل

$$R(x) = \frac{100x}{b+x}$$

یافت که $b > 0$ ثابتی وابسته به هر قورباغه است. اگردر قورباغه‌ای $R(50) = 60$ باشد یعنی غلظت ۵۰ واحد باعث ۶۰ درصد عکس العمل شود، مقدار b را بیابید. منحنی $R(x)$ را در صفحه رسم نمائید.

۵۲) **(علوم اجتماعی)** عموماً در محیط اجتماعی با تعامل زیاد، در ایجاد یک شایعه، میزان افرادی که شایعه‌ای را می شنوند روزانه افزایش می یابد. در آغاز تعداد کمی از افراد شایعه را می شنوند و در سایر روزها این انعکاس شایعه بمراتب بیشتر شده تا تمام افراد (بالغ) جامعه از شایعه مطلع شوند. این مطلب را می توان با یک منحنی از تعداد روزها بر حسب تعداد افرادی که شایعه را شنیده‌اند نشان داد. فرض کنید t تعداد روزها و $N(t)$ تعداد افرادی باشد که در روز t−ام شایعه را شنیده اند. این داده ها در یک شهر ۱۰ هزار نفری در جدول زیر آمده است. با نقطه یابی منحنی تابع $N(t)$ را رسم نمائید.

t	$N(t)$	t	$N(t)$	t	$N(t)$
۰	۱	۴	۱۴۲۰	۸	۹۶۵۰
۱	۸	۵	۳۴۶۰	۹	۹۸۴۰
۲	۵۲	۶	۶۸۲۰	۱۰	۹۹۸۰
۳	۲۸۰	۷	۸۲۶۰		

آهنگ تغییر متوسط این منحنی را روی بازه‌های واحد (روز) بدست آورید و شیب ظاهری داده ها را روی هر بازه مشخص نمائید.

[۴] *Acetylcholine*
[۵] *A.J.Clark*

۵۳) **(فیزیک)** معادلهٔ پارامتری حرکت پرتابه‌ای در مثال۳۵.۹ آمده است. جسم تحت چه زاویه ای پرتاب شود تا برد به حداکثر مقدار خود برسد؟

۵۴) **(فیزیک)** جسمی با سرعت اولیه $v_۰ = ۱۰\frac{m}{s}$ از ارتفاع ۱۰۰۰ متری به پائین پرتاب می شود و در راستای قائم سقوط می کند. t ثانیه پس از سقوط جسم، مکان آن به اندازه $s = \frac{۱}{۲}gt^۲ + ۱۰t$ تغییر می کند. متوسط تغییرات مسافت و جابجائی را طی $۱s$ و $۲s$ بیابید. در لحظه $t = ۲s$ سرعت لحظه‌ای آن چقدر است؟

۵۵) **(فیزیک)** جسمی روی محور x—ها طبق معادله حرکت $x(t) = ۴t^۲ - ۲t + ۱$ جابجا می‌شود. متوسط تغییرات جابجائی در بازه $[۲s, ۳s]$ چقدر است. همچنین تغیرات لحظه‌ای سرعت آن را در $t = ۵s$ بیابید؟

۵٦) **(فیزیک)** تابع مکان ذره‌ای در صفحه $f(t) = (\cos t, \sin t)$ است. اندازهٔ شتاب ذره چقدر است.

۵۷) **(شیمی)** طبق قانون انبساط عمومی گازها در فشار P و دمای T و حجم V یک گاز $\frac{PV}{T} = R$ است. در فشار ۴۰۰ بار و حجم ۱۰ سانتیمتر مکعب و دمای ثابت ۲۰ درجه سلسیوس اگر حجم گاز بمیزان $۵\frac{cm^۳}{s}$ افزایش یابد، میزان افزایش فشار چقدر است؟

۵۸) **(معماری)** برای هر منحنی بزیر با نقاط کنترلی $P_۰$، $P_۱$، $P_۲$ و $P_۳$، نشان دهید خط مماس در $P_۰$ از $P_۱$ عبور کرده و خط مماس در $P_۳$ از $P_۲$ عبور می کند.

۵۹) **(اقتصاد)** فرض کنید تابع هزینه جهت تولید محصولی توسط معادلهٔ زیر مشخص شود:

$$C(x) = ۰/۰۰۲۵x^۴ - ۰/۰۲x^۲ + ۰/۱x$$

(الف) هزینهٔ متوسط تولید روزانه چقدر است؟
(ب) هزینهٔ افزایش تولید از ۱۰۰ واحد به ۱۰۱ واحد در روز چقدر است؟
(ج) رفتار تابع هزینهٔ نهائی را توضیح داده و نمودار آنرا رسم کنید.

٦۰) **(اقتصاد)** تابع هزینهٔ کل خطی بشکل $C(x) = mx + h$ را در نظر گرفته، توابع هزینهٔ متوسط و هزینهٔ نهائی آنرا بیابید. منحنی هزینه کل TC، منحنی هزینه متوسط AC و منحنی هزینه نهائی MC را در صفحهٔ مختصات رسم نمائید.

٦۱) **(اقتصاد)** تابع هزینهٔ کل درجه دو بشکل $C(x) = ax^۲ + bx + c$ را در نظر گرفته، توابع هزینهٔ متوسط و هزینهٔ نهائی آنرا بیابید. برحسب پارامترهای موجود در مورد هزینه ها بحث کنید. در هر مورد منحنی هزینه کل TC، منحنی هزینه متوسط AC و منحنی هزینه نهائی MC را در صفحهٔ مختصات رسم نمائید.

۶۲) **(اقتصاد)** معادلهٔ تقاضای x واحد از یک اسباب بازی عبارتست از $p = ۲۰۰۰ - ۲۵x$. (الف) تابع درآمد کل و تابع درآمد نهائی را نوشته و منحنی درآمد کل و منحنی درآمد نهائی را رسم نمائید. (ب) سطح تولید چقدر باشد که درآمد ماکزیمم شود. (ج) درآمد کل حاصل از فروش چهل اسباب بازی چقدر است؟ (د) درآمد حاصل از فروش چهل و یکمین اسباب بازی چه سودی بدنبال دارد؟ علت را توضیح دهید.

۶۳) **(اقتصاد)** فرض کنید قیمت هر واحد کالائی p تومان و x تای آنها در هفته به فروش می‌رسد. اگر x و p در معادلهٔ تقاضای $xp + ۲x + p = ۳۸$ صدق کنند، آهنگ تغییرات فروش هفتگی را وقتی $x = ۴$ و $p = ۶$ است و قیمت کالا با آهنگ ۴ تومان در هفته کاهش می یابد چقدر است؟

۶۴) **(اقتصاد)** معادلهٔ تقاضا برای کالائی بصورت $x^۳ + p^۳ - ۳xp = ۱۰۰$ است، که p بهای کالا به تومان و x مقدار تقاضای کالا در روز است. اگر در روز خاصی قیمت کالا ۲۴۰ تومان باشد و بها بمیزان ۱۵ تومان کاهش یابد، میزان تغییر تقاضا چقدر خواهد بود؟

۶۵) **(اقتصاد)** معادلهٔ عرضهٔ کالائی بصورت $x^۲ + ۲xp = ۴۰۰$ است. اگر بهای کالا ۱۰۰ تومان باشد و بمیزان ۵ تومان افزایش یابد میزان تغییر تقاضا چگونه است؟

۶۶) **(اقتصاد)** در سطحی از تولید، وقتی هزینهٔ نهائی مینیمم می شود که هزینهٔ متوسط برابر با هزینهٔ نهائی شود. این مطلب را ثابت کنید.

۶۷) **(اقتصاد)** معادلهٔ تقاضای محصولی $p = ۵۰۰ - ۰/۰۳x$ بوده و کارخانه با صرف هزینهٔ روزانهٔ ۵۰ هزارتومان، هر کالا را با هزینهٔ ۱۵۰ تومان تولید می کند. اگر دولت بازای هر واحد تولید کارخانه مبلغ ۲۵ تومان مالیات اخذ نماید، در چه واحدی از تولید روزانه و فروش چه بهائی برای هر واحد کالا، سود ماکزیمم حاصل می شود؟

فصل ۱۰

انتگرال

عموماً به قسمتی از ریاضی که به مشتق و انتگرال می پردازد، حساب دیفرانسیل و انتگرال گویند. هرچند مفهوم ایندو و همچنین پیدایش این دو موضوع در ریاضی، کاملاً جدا صورت گرفته لیکن در نگاه اول و نیز آنچه مورد توجه ماست ارتباط بین ایندو مفهوم است چنانچه می‌توان هر دو عمل را عکس همدیگر نامید.

بطوری کاملاً سطحی، انتگرال را می توان عکس حالت مشتق گیری یا پادمشتق معرفی نمود، بدین معنی که برای تابع پیوستهٔ مفروضی مانند $f(x)$ بایستی تابع $F(x)$ را چنان بیابیم که $F'(x) = f(x)$. به تابع $F(x)$ بدست آمده، تابع اولیهٔ $f(x)$ گوئیم. برای مثال می دانیم $[\sin x]' = \cos x$ پس $\sin x$ تابع اولیهٔ $\cos x$ است. جهت بدست آوردن تابع اولیه از قواعدی بهره خواهیم گرفت که مباحث این فصل را تشکیل می دهد.

۱.۱۰ تعاریف و روشها

در ابتدا ذکر کنیم که برای بدست آوردن تابع اولیه یا انتگرال یک تابع، نماد $\int$ را در کنار $d(x)$ بکار خواهیم برد و نگارش متعارف زیر را می نویسیم:

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

که تابع $f(x)$ را **انتگرالده** (انتگران)، dx را **متغیر انتگرالگیری** و $F(x)$ را **پادمشتق** یا **تابع اولیهٔ** $f(x)$ نامیم. ثابت C به نام **ثابت انتگرال** که در انتهای کار آمده را در همهٔ انتگرالها ذکر خواهیم

نمود. اگر بدانیم تابع اولیهٔ انتگرالده x^n عبارت از $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ است، سپس برای بدست آوردن تابع اولیهٔ x^4+5x^3-7x می نویسیم:

$$\int x^4+5x^3-7x\,dx=\int x^4\,dx+5\int x^3\,dx-7\int x\,dx=\frac{x^5}{5}+5\frac{x^4}{4}-7\frac{x^2}{2}+C$$

برای انتگرال مجموع چند تابع می توان از تک تک توابع جداگانه انتگرال گرفت، زیرا انتگرال خطی است یعنی:

$$\int\Big[\alpha f(x)+\beta g(x)\Big]dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx \qquad , \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

توابع اولیهٔ انتگرال های مختلفی را در جدول ذیل ذکر نمودیم. برای انتگرال گیری از توابع دیگر می بایست انتگرالده را به یکی از اشکال زیر درآورد.

$$\int dx=x+C \tag{1}$$

$$\int a\,dx=ax+C \qquad (\text{عدد ثابت } a) \tag{2}$$

$$\int x^r\,dx=\frac{x^{r+1}}{r+1}+C \qquad (\text{عدد حقیقی } r\neq-1) \tag{3}$$

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C \qquad (x\neq0) \tag{4}$$

$$\int\frac{1}{x-a}\,dx=\ln|x-a|+C \qquad (x\neq a) \tag{5}$$

$$\int e^x\,dx=e^x+C \tag{6}$$

$$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \qquad (a>0\ ,\ a\neq1) \tag{7}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\arcsin(\frac{x}{a})+C \qquad (a>0) \tag{8}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx=\sinh^{-1}(\frac{x}{a})+C \qquad (a>0) \tag{9}$$

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+C \qquad (a\neq0) \tag{10}$$

$$\int\frac{1}{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C \qquad (a\neq0) \tag{11}$$

$$\int\frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx=-\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|+C \qquad (a\neq b) \tag{12}$$

ضروری است که ذکر کنیم برای هر تابع پیوستهٔ f همواره داریم:

$$\int df=f$$

مثال ۱.۱۰ حاصل انتگرال های زیر با استفاده از جدول فوق بدست آمده است.

$$(a)\quad \int x^4+6x^2+x-9\,dx=\frac{x^5}{5}+6\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-9x+C$$

$$(b)\quad \int 7x^6+x^2+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^4}dx=\int 7x^6+x^2+\frac{1}{x}-2x^{-4}dx$$
$$=7\frac{x^7}{7}+\frac{x^3}{3}+\ln|x|-2\frac{x^{-3}}{-3}+C$$

$$(c)\quad \int 4x^5+3\sqrt[4]{x^3}-\frac{6}{\sqrt[7]{x^2}}\,dx=\int 4x^5+3x^{\frac{3}{4}}-6x^{\frac{-2}{7}}\,dx$$
$$=4\frac{x^6}{6}+3\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}-6\frac{x^{\frac{-2}{7}+1}}{\frac{-2}{7}+1}+C$$
$$=\frac{2}{3}x^6+\frac{12}{7}\sqrt[4]{x^7}-\frac{42}{5}\sqrt[7]{x^5}+C$$

$$(d)\quad \int \frac{4\sqrt{x}}{x}-2^{x+1}+\frac{3}{x}\,dx=\int 4x^{\frac{-1}{2}}-2\times 2^x+3\frac{1}{x}\,dx$$
$$=8\sqrt{x}-\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+3\ln|x|+C$$

$$(e)\quad \int \frac{4x^3-9x}{x^2}\,dx=\int \frac{4x^3}{x^2}-\frac{9x}{x^2}\,dx$$
$$=\int 4x-9\frac{1}{x}\,dx$$
$$=2x^2-9\ln|x|+C$$

$$(f)\quad \int \frac{dx}{16-x^2}=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{4+x}{4-x}\right|+C$$

$$(g)\quad \int \frac{dx}{9+x^2}=\frac{1}{3}\arctan(\frac{x}{3})+C$$

$$(h)\quad \int \frac{dx}{9-x^2}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|+C$$

$$(i)\quad \int 2^x+2^{-x}dx=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}}+C$$

$$(j)\quad \int \frac{x^4+x^2+1}{x^3}dx=\int x+\frac{1}{x}+x^{-3}dx$$
$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x|+\frac{x^{-2}}{-2}+C$$

$$(k)\quad \int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx=\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx$$
$$=-\frac{1}{-2+3}\ln\left|\frac{x-2}{x-3}\right|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$$

تمرین ۱.۱۰ حاصل انتگرالهای زیر را بیابید.

$$(a)\quad \int x^{۴}+۵x^{۳}-۴xdx \qquad , \quad (b)\quad \int \frac{۱}{x^{۵}}-۶x^{۲}+۴x^{۳}+\frac{۲}{x}dx$$

$$(c)\quad \int \frac{x^{۷}-۸x^{۳}+۴x^{۲}+۵}{x^{۳}}dx \qquad , \quad (d)\quad \int x(x^{۲}+x^{۳}-۸)dx$$

$$(e)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{۴-x^{۲}}} \qquad , \quad (f)\quad \int ۴\sqrt[۳]{x}-۵^{x}+\frac{۳}{x^{۳}}\,dx$$

$$(g)\quad \int (x^{۲}+۵)(۳x^{۳}-۴)dx \qquad , \quad (h)\quad \int \frac{۱}{x^{۲}-x-۱۲}dx$$

$$(i)\quad \int ۳^{x}+۵^{x+۳}-e^{x}dx \qquad , \quad (j)\quad \int \frac{۲}{۲۵-x^{۲}}\,dx$$

$$(k)\quad \int \frac{x^{۵}-۲x^{۴}+x^{۳}+۲x^{۲}}{x^{۲}}dx \qquad , \quad (l)\quad \int \frac{۲}{x^{۲}-۷x+۱۲}\,dx$$

$$(m)\quad \int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[۴]{x^{۳}}+۲x^{۲}-۳x}{\sqrt[۳]{x}}dx \qquad , \quad (n)\quad \int \frac{۳x+۲}{x^{۲}-۷x+۶}\,dx$$

۱.۱.۱۰ انتگرال توابع کسری

همانگونه که مثال ۱.۱۰ (e و j) نشان می دهد، در مواردی که صورت انتگرالده چندجمله‌ای و مخرج یک جمله‌ای است، انتگرالده را به چند عامل مجزا تفکیک می کنیم. برای مثال

$$\int \frac{x^{۵}+۷x^{۲}-۶}{x^{۳}}\,dx=\int x^{۲}+\frac{۷}{x}-۶x^{-۳}\,dx=\frac{x^{۳}}{۳}+۷\ln|x|+\frac{۳}{x^{۲}}+C$$

اگر درجهٔ صورت انتگرالده از مخرج بیشتر باشد، با تقسیم صورت بر مخرج و بدست آوردن خارج قسمت و باقی مانده، از کسر تجزیه شده انتگرال می گیریم:

مثال ۲.۱۰ مطلوبست حل انتگرال

$$\int \frac{۲x^{۴}-۵x^{۳}+۷x-۱}{x-۲}\,dx$$

حل. درجهٔ صورت از مخرج بیشتر است، با تقسیم صورت بر مخرج، عبارت $۲x^{۳}-x^{۲}-۲x+۳$ خارج قسمت تقسیم و ۵ باقیماندهٔ تقسیم است. حاصل انتگرال چنین است:

$$\begin{aligned}\int \frac{۲x^{۴}-۵x^{۳}+۷x-۱}{x-۲}\,dx &= \int ۲x^{۳}-x^{۲}-۲x+۳+\frac{۵}{x-۲}\,dx\\ &= \frac{۱}{۲}x^{۴}-\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}+۳x+۵\ln|x-۲|+C\end{aligned}$$

برای برخی انتگرالها که صورت و مخرج چندجمله‌ای بوده و مخرج را بتوان تجزیه کرد، **روش تجزیهٔ کسرها** را بکار می گیریم که در مثال زیر نمونه ای از آن را ذکر می کنیم.

مثال ۳.۱۰ مطلوبست حل انتگرال

$$I=\int \frac{2x-12}{x^3-5x^2+6x}dx$$

حل. با تجزیه کسر انتگرالده و فرض ضرایب A و B و C داریم:

$$\frac{2x-12}{x^3-5x^2+6x}\equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

پس از مخرج مشترک طرف راست و ساده کردن صورت، همارزی زیر حاصل می شود:

$$\frac{2x-12}{x^3-5x^2+6x}\equiv \frac{(A+B+C)x^2+(-5A-3B-2C)x+6A}{x(x-2)(x-3)}$$

از آنجا که مخرج دو طرف برابر است، با تناظر مقادیر صورت طرفین می نویسیم[۱]:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -5A-3B-2C=2 \\ 6A=-12 \end{cases} \Rightarrow \quad A=-2, B=4, C=-2$$

با جایگذاری مقادیر و مطابق فرمولهای انتگرال، حاصل چنین می شود:

$$I=\int\left(\frac{-2}{x}+\frac{4}{x-2}+\frac{-2}{x-3}\right)dx=-2\ln|x|+4\ln|x-2|-2\ln|x-3|+C$$

انتگرال کسری درصورتیکه مخرج تجزیه شود در فوق ذکر گردید. در حالتی که مخرج تجزیه نمی شود، معمولاً حاصل انتگرال، شکلی از تابع $\arctan$ خواهد بود (مثال ۹.۱۰ را ببینید). در حالاتی خاص از انتگرال کسری، هنگامی که در کسر انتگرالده، مشتق مخرج در صورت باشد، حاصل انتگرال برابر $\ln$ مخرج خواهد بود بدین شکل

$$\int \frac{5x^4+4x^3-2}{x^5+x^4-2x-6}dx=\ln|x^5+x^4-2x-6|+C$$

زیرا عبارت صورت انتگرالده مشتق چندجملهای مخرج است.

---

[۱]– وقتی مخرج را به عوامل درجه اول تجزیه کردیم، سوای مخرج مشترک و تساوی صورتها، می توان روشی دیگر بکار گرفت که سریعتر (و دقیقتر) از آنست بدین ترتیب که کسر اولیه با مخرج تجزیه شده را در مخرج هر پارامتر ضرب می کنیم سپس ریشهٔ مخرجها را بجای x قرار می دهیم. حاصل کار چنین است:

$$\begin{aligned}
A &= (x)\frac{2x-12}{x(x-2)(x-3)}\bigg|_{x=0}=\frac{2x-12}{(x-2)(x-3)}\bigg|_{x=0}=\frac{-12}{-2\times -3}=-2\\
B &= (x-2)\frac{2x-12}{x(x-2)(x-3)}\bigg|_{x=2}=\frac{2x-12}{x(x-3)}\bigg|_{x=2}=\frac{-8}{2\times -1}=4\\
C &= (x-3)\frac{2x-12}{x(x-2)(x-3)}\bigg|_{x=3}=\frac{2x-12}{x(x-2)}\bigg|_{x=3}=\frac{-6}{3\times 1}=-2
\end{aligned}$$

این روش وقتی بکار می رود که عوامل حاصل از تجزیه در مخرج، از درجهٔ یک باشند و برای مخرج با ریشهٔ مکرر جواب نمی دهد.

تمرین ۲.۱۰ انتگرال های کسری زیر را حل کنید.

$$(a)\quad \int \frac{۳x^۶ + ۲x^۴ - ۱۰x^۲ + ۳}{x^۳}\,dx \quad , \quad (b)\quad \int \frac{x^۵ - ۶x^۲ + ۴x^۳ + ۲}{۳x^۲}\,dx$$

$$(c)\quad \int \frac{x^۴ + ۲x^۳ + ۸x - ۱۰}{x^۲ + ۴}\,dx \quad , \quad (d)\quad \int \frac{x^۵ - ۶x^۲ + ۴x^۳ + ۲}{x - ۲}\,dx$$

$$(e)\quad \int \frac{x^۵ - ۲x^۴ + x^۳ + ۲x^۲}{x + ۱}\,dx \quad , \quad (f)\quad \int \frac{۲}{x^۲ - ۷x + ۱۲}\,dx$$

$$(g)\quad \int \frac{x + ۱}{x^۳ + ۲x^۲ - ۳x}\,dx \quad , \quad (h)\quad \int \frac{۳x + ۲}{x^۳ - ۷x - ۶}\,dx$$

۲.۱.۱۰ روش جانشینی (تغییر متغیر)

برای حل برخی انتگرالها لازم است از طریق تغییر متغیر (جانشینی) با متغیری بخصوص، انتگرال را ساده تر کرده و سپس از فرمولهای قبلی استفاده کنیم. در طریقهٔ جانشینی می بایست دیفرانسیل متغیر کنونی و جانشین را با استفاده از رابطهٔ جانشین محاسبه و در انتگرال جایگذاری نمود. برای مثال انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$I = \int \frac{۴x\ dx}{(۲x^۲ - ۳)^{۲۳}}$$

مسلماً با بتوان رساندن عامل $(۲x^۲ - ۳)^{۲۳}$ در مخرج و یا روشهای گذشته این انتگرال بسختی! قابل حل است. از روش جانشینی به این طریق عمل می کنیم که با فرض

$$۲x^۲ - ۳ = u$$

بعنوان متغیر جانشین، از طرفین دیفرانسیل می گیریم $۴x\,dx = du$ و با جایگذاری مقادیر بدست آمده در انتگرال داریم:

$$\begin{aligned} I = \int \frac{۴x\ dx}{(۲x^۲ - ۳)^{۲۳}} &= \int \frac{du}{u^{۲۳}} \\ &= \int u^{-۲۳}\,du \\ &= \frac{u^{-۲۲}}{-۲۲} + C \\ &= -\frac{۱}{۲۲u^{۲۲}} + C \\ &= -\frac{۱}{۲۲(۲x^۲ - ۳)^{۲۲}} + C \end{aligned}$$

در انتها می بایست با جایگذاری متغیر جانشین، متغیر را بحالت اولیه برگرداند.

مثال ۴.۱۰ مطلوبست حل انتگرال

$$J = \int \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{x^3 - x + 1}}\, dx$$

حل. از روش جانشینی بدو طریق مسئله را حل می کنیم. ابتدا با فرض $x^3 - x + 1 = u$ از طرفین دیفرانسیل می گیریم $(3x^2 - 1)dx = du$ و با جایگذاری در انتگرال داریم:

$$\begin{aligned} J = \int \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{x^3 - x + 1}}\, dx &= \int \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= 2\sqrt{u} + C \\ &= 2\sqrt{x^3 - x + 1} + C \end{aligned}$$

از نگاهی دیگر، بفرض $x^3 - x + 1 = u^2$ و گرفتن دیفرانسیل از طرفین $(3x^2 - 1)dx = 2udu$ و سپس جایگذاری مقادیر بدست آمده در انتگرال نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} J = \int \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{x^3 - x + 1}}\, dx &= \int \frac{2udu}{u} \\ &= \int 2du = 2u + C \\ &= 2\sqrt{x^3 - x + 1} + C \end{aligned}$$

مثال ۵.۱۰ حاصل انتگرال $K = \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}dx$ را حساب کنید.

حل. با روش جانشینی فرض کنید $x^2 + x + 1 = u$ و دیفرانسیل می گیریم

$$(2x + 1)dx = du$$

با جایگذاری می نویسیم:

$$\begin{aligned} K = \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}dx &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|x^2 + x + 1| + C \end{aligned}$$

تمرین ۳.۱۰ انتگرال های زیر را به روش جانشینی حل کنید.

$$\begin{array}{llllll} (a) & \int 3x^2\sqrt{1 + x^3}\, dx, & (b) & \int \frac{3x^2 + 5}{x^3 + 5x}\, dx, & (c) & \int x(1 + x)^{50}\, dx \\ (d) & \int \frac{(\sqrt[3]{x} + 2)^4}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx, & (e) & \int \frac{\ln x\, dx}{x}, & (f) & \int \frac{2x^3 + x}{\sqrt[3]{x^4 + x^2 + 1}}\, dx \\ (g) & \int \frac{5x^4 - 1}{\sqrt{x^5 - x + 7}}\, dx, & (h) & \int (\ln x)^3\, \frac{dx}{x}, & (i) & \int \frac{x\, dx}{(x^2 + 1)^{50}} \end{array}$$

۳.۱.۱۰ انتگرال توابع مثلثاتی

فرمول های انتگرال توابع مثلثاتی و توابع هیپربولیک چنین است:

$$\int \sin ax\ dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C \qquad (a \neq 0) \qquad (13)$$

$$\int \cos ax\ dx = \frac{1}{a}\sin ax + C \qquad (a \neq 0) \qquad (14)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C \qquad (15)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C \qquad (16)$$

$$\int \sinh x\ dx = \cosh x + C \qquad (17)$$

$$\int \cosh x\ dx = \sinh x + C \qquad (18)$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x}dx = -\coth x + C \qquad (19)$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}dx = \tanh x + C \qquad (20)$$

انتگرال زیر با استفاده از فرمولهای فوق بدست آمده است:

$$\int \sin 3x + 4\cos 2x - \frac{7}{\sin^2 x}\ dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + 2\sin 2x + 7\cot x + C$$

مثال ۶.۱۰ مطلوبست محاسبهٔ انتگرال $\int \cot x\ dx$

حل. با نوشتن انتگرال بشکل $\int \frac{\cos x}{\sin x}\ dx$ و اینکه مشتق مخرج در صورت قرار داد حاصل انتگرال برابر $\ln|\sin x| + C$ است.

دانستن روابط مثلثاتی و اتحادهای مثلثاتی در حل انتگرال های مثلثاتی بسیار مهم است:

$$\begin{aligned}
\int \sin 2x \cos 4x\ dx &= \int \frac{1}{2}(\sin 6x - \sin 2x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 6x}{6} - \frac{-\cos 2x}{2}\right) + C \\
&= \frac{-\cos 6x}{12} + \frac{\cos 2x}{4} + C
\end{aligned}$$

عمدهٔ فرمولهای مثلثاتی در فصل۶ بیان شده‌اند. علاوه بر این در حل برخی از انتگرال ها **روش جانشینی مثلثاتی** بسیار موثر است که در خلال آن از اتحادهای مثلثاتی نیز می توان کمک گرفت. اگر انتگرالده دارای عامل $\sqrt{a^2 - x^2}$ باشد (a عددی دلخواه ناصفر)، از تغییر متغیر $x = a\sin\theta$ یا $x = a\cos\theta$ استفاده می کنیم.

مثال ۷.۱۰ مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$I = \int \frac{dx}{x^۲\sqrt{۹ - x^۲}}$$

حل. با جانشین مثلثاتی $x = ۳\sin\theta$ و دیفرانسیل از طرفین آن $dx = ۳\cos\theta d\theta$، مقادیر را در انتگرال قرار می دهیم:

$$I = \int \frac{dx}{x^۲\sqrt{۹ - x^۲}} = \int \frac{۳\cos\theta d\theta}{(۳\sin\theta)^۲\sqrt{۹ - (۳\sin\theta)^۲}} = \int \frac{۳\cos\theta d\theta}{۹\sin^۲\theta \times ۳\cos\theta}$$

$$= \frac{۱}{۹}\int \frac{d\theta}{\sin^۲\theta} = -\frac{۱}{۹}\cot\theta + C$$

لازم است متغیر را دوباره به x برگردانیم. چون $\frac{x}{۳} = \sin\theta$ پس

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{۱ - \sin^۲\theta}}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{۹ - x^۲}}{x}$$

و بالاخره $I = -\frac{\sqrt{۹ - x^۲}}{۹x} + C$.

برای محاسبهٔ انتگرالهائی که دارای عامل $a^۲ + x^۲$ هستند از تغییر متغیر $x = a \ \tan x$ یا $x = a \ \cot x$ بهره می گیریم. به دو مثال در این زمینه توجه نمائید:

مثال ۸.۱۰ حاصل انتگرال $J = \int \frac{۲xdx}{۱۶ + x^۴}$ چیست؟

حل. از آنجا که $۱۶ + x^۴ = ۱۶ + (x^۲)^۲$ با در نظر گرفتن جانشین مثلثاتی $x^۲ = ۴ \ \tan\theta$ و نیز دیفرانسیل از طرفین آن

$$۲x \ dx = ۴(۱ + \tan^۲\theta)d\theta$$

و مقادیر را در انتگرال قرار می دهیم:

$$J = \int \frac{۴(۱ + \tan^۲\theta)d\theta}{۱۶ + ۱۶\tan^۲\theta} = \int \frac{d\theta}{۴} = \frac{\theta}{۴} + c = \frac{۱}{۴}\arctan(\frac{x^۲}{۴}) + C$$

مثال ۹.۱۰ انتگرال زیر را حساب کنید.

$$I = \int \frac{dx}{x^۲ + x + ۱}$$

حل. چون

$$I = \int \frac{dx}{x^۲ + x + ۱} = \int \frac{dx}{(x + \frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}$$

با تغییر متغیر

$$x+\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\tan\theta$$

و اینکه دیفرانسیل طرفین بشکل $dx=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱+\tan^۲\theta)d\theta$ است و سپس با جایگذاری داریم:

$$I=\int\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱+\tan^۲\theta)d\theta}{\frac{۳}{۴}\tan^۲\theta+\frac{۳}{۴}}=\int\frac{۲d\theta}{\sqrt{۳}}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\theta+C=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\arctan(\frac{۲x+۱}{\sqrt{۳}})+C$$

در محاسبهٔ مواردی خاص در انتگرال های مثلثاتی، تغییرمتغیر $u=\tan\frac{x}{۲}$ به همراه جایگذاریهای زیر انتگرال را براحتی قابل حل می سازد:

$$dx=\frac{۲du}{۱+u^۲}\quad,\quad \sin x=\frac{۲u}{۱+u^۲}\quad,\quad \cos x=\frac{۱-u^۲}{۱+u^۲}\quad,\quad \tan x=\frac{۲u}{۱-u^۲}$$

مثال ۱۰.۱۰ مطلوبست محاسبهٔ انتگرال $\int\frac{dx}{۱+\sin x}$

حل. از تغییر متغیر $u=\tan\frac{x}{۲}$ و جایگذاری روابط $dx=\frac{۲du}{۱+u^۲}$ و $\sin x=\frac{۲u}{۱+u^۲}$ می‌نویسیم:

$$\int\frac{dx}{۱+\sin x}=\int\frac{\frac{۲du}{۱+u^۲}}{۱+\frac{۲u}{۱+u^۲}}=\int\frac{۲du}{(۱+u)^۲}=-\frac{۲}{۱+u}+C=-\frac{۲}{۱+\tan\frac{x}{۲}}+C$$

مطلب ۱.۱۰ در موارد $\int\sin^n x\,dx$ و $\int\cos^n x\,dx$ مسئله را در دو حالت حل می کنیم.

الف) اگر n فرد باشد. گیریم $n=۲k+۱$ و می نویسیم

$$\int\sin^n xdx=\int\sin^{۲k+۱}xdx=\int\sin^{۲k}x\sin xdx=\int(۱-\cos^۲x)^k\sin xdx$$

با تغییر متغیر $\cos x=u$ انتگرال بروش جانشینی حل می شود. برای انتگرال دیگر نیز به همین شیوه و با تغییر متغیر $\sin x=u$ بروش جانشینی عمل می کنیم.

ب) اگر n زوج باشد $n=۲k$، از فرمول های

$$\sin^۲x=\frac{۱-\cos۲x}{۲}\qquad,\qquad \cos^۲x=\frac{۱+\cos۲x}{۲}$$

استفاده می کنیم. سپس با ادامهٔ این روند توان را در انتگران از بین می بریم.

در حالاتی که انتگرال بصورت $\int\sin^n x\cos^m xdx$ باشد آن را به یکی از دو شکل فوق درمی آوریم. اگر m و n زوج باشند، به روش (ب) و اگر دست کم یکی از m و n فرد باشد، به روش (الف) انتگرال براحتی قابل حل خواهد بود.

مثال ۱۱.۱۰ حل انتگرال $I=\int \cos^{۵} x dx$

حل. چون توان فرد است از (الف) داریم:

$$I=\int \cos^{۵} x dx=\int \cos^{۴} x \cos x dx=\int (۱-\sin^{۲} x)^{۲} \cos x dx$$

با تغییر متغیر $\sin x=u$ و دیفرانسیل طرفین آن $\cos x dx=du$ می نویسیم:

$$\begin{aligned} I &= \int (۱-u^{۲})^{۲} \, du \\ &= \int \, ۱-۲u^{۲}+u^{۴} \, du \\ &= u-\frac{۲}{۳}u^{۳}+\frac{۱}{۵}u^{۵}+C \\ &= \sin x-\frac{۲}{۳}\sin^{۳} x+\frac{۱}{۵}\sin^{۵} x+C \end{aligned}$$

مثال ۱۲.۱۰ حل انتگرال $J=\int \sin^{٦} x dx$

حل. برای توان زوج از فرمول $\cos^{۲} x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}$ استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} J &= \int (\sin^{۲} x)^{۳} dx \\ &= \int \left(\frac{۱-\cos ۲x}{۲}\right)^{۳} dx \\ &= \frac{۱}{۸}\int ۱-۳\cos ۲x+۳\cos^{۲} ۲x-\cos^{۳} ۲x \, dx \\ &= \frac{۱}{۸}\int ۱-۳\cos ۲x+۳\frac{۱+\cos ۴x}{۲}-\cos^{۲} ۲x\cos ۲x \, dx \\ &= \frac{۵x}{۱٦}-\frac{۳\sin ۲x}{۱٦}+\frac{۳\sin ۴x}{٦۴}-\frac{۱}{۸}\int (۱-\sin^{۲} ۲x)\cos ۲x \, dx \\ &= \qquad \cdots \qquad -\frac{۱}{۸}\frac{۱}{۲}\int (۱-u^{۲})du \\ &= \qquad \cdots \qquad -\frac{۱}{۱٦}(u-\frac{u^{۳}}{۳}) \\ &= \qquad \cdots \qquad -\frac{۱}{۱٦}\left(\sin ۲x-\frac{\sin^{۳} ۲x}{۳}\right) \\ &= \frac{۵x}{۱٦}-\frac{۳\sin ۲x}{۱٦}+\frac{۳\sin ۴x}{٦۴}-\frac{۱}{۱٦}\left(\sin ۲x-\frac{\sin^{۳} ۲x}{۳}\right)+C \\ &= \frac{۵}{۱٦}x-\frac{۱}{۴}\sin ۲x+\frac{۳}{٦۴}\sin ۴x-\frac{۱}{۳٦}\sin^{۳} ۲x+C \end{aligned}$$

مثال ۱۳.۱۰ مطلوبست انتگرال $K=\int \sin^{10}x\cos x\ dx$

حل. با تغییر متغیر $\sin x=u$ و $\cos x\ dx=du$ و جایگذاری داریم:

$$K=\int \sin^{10}x\cos x\ dx=\int\ u^{10}\ du=\frac{u^{11}}{11}+C=\frac{\sin^{11}x}{11}+C$$

مثال ۱۴.۱۰ محاسبهٔ انتگرال $I=\int \frac{x+2}{x^3-1}dx$

حل. با روش تجزیهٔ کسر انتگرال و فرض ضرایب A و B و C داریم:

$$\frac{x+2}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

پس از مخرج مشترک و ساده کردن صورت

$$\frac{x+2}{x^3-1}=\frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

و بنابر تناظر مقادیر صورت می نویسیم:

$$A+B=0,\ A-B+C=1,\ A-C=2\implies A=1,\ B=-1,\ C=-1$$

که انتگرالده به دو کسر تجزیه می شود:

$$I=\int\frac{x+2}{x^3-1}dx=\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx$$

$$=\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$$

مطابق مثالهای ۵.۱۰ و ۹.۱۰ حاصل چنین بدست می آید:

$$I=\int\frac{x+2}{x^3-1}\ dx=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

تمرین ۴.۱۰ حاصل انتگرال های مثلثاتی زیر را بدست آورید.

$$\begin{array}{llllll}
(a) & \int\sin 3x+\cos 4x dx, & (b) & \int\sin^2 3x\ dx\ , & (c) & \int\sin 2x\sin 5x dx\\
(d) & \int -3\sin x\cos x dx\ , & (e) & \int\tanh 2x dx\ , & (f) & \int\sin 3x\cos 4x\sin 6x dx\\
(g) & \int\sin x\cos^3 x dx\ , & (h) & \int\tan^2 x dx\ , & (i) & \int\cos 2x\sqrt{1-\cos 4x}dx\\
(j) & \int\frac{\cot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx\ , & (k) & \int\cos^4 x dx\ , & (l) & \int\sin^3 4x\sqrt[3]{\cos 4x}dx\\
(m) & \int\sin^3 x dx\ , & (n) & \int\frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}\ , & (o) & \int\sin(\cos x)\sin 2x dx
\end{array}$$

۴.۱.۱۰ روش جزء به جزء

از مهمترین روشهای انتگرالگیری، روش جزء به جزء است که برای حل برخی از انتگرال هائی بکار میرود که با سایر روشها قابل حل نیستند. فرمول انتگرالگیری جزء به جزء بشکل زیر است:

$$\int u \; dv = uv - \int v \; du$$

که u و v توابع مفروض حاصل تفکیک انتگرالده هستند. برای حل یک انتگرال بروش جزء به جزء، ابتدا جملهٔ انتگرالده را به u و dv تفکیک نموده و سپس از فرمول فوق بهره می گیریم. تفکیک u و dv بایستی بنحوی باشد که انتگرال رو به ساده شدن رفته و در اکثر حالات تابع u را آن قسمتی می گیریم که مشتق آن ساده‌تر شود. به دو مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱۵.۱۰ حل انتگرال $\int x \; e^x \; dx$

حل. جزء x را برابر u و جزء $e^x dx$ را برابر dv می گیریم پس

$x = u \quad \Rightarrow$ دیفرانسیل می گیریم تا du بدست آید $\Rightarrow \; dx = du$

$e^x \; dx = dv \; \Rightarrow$ انتگرال می گیریم تا مقدار v بدست آید $\Rightarrow \; e^x = v$

$$\int \; xe^x \; dx = (x)(e^x) - \int \; e^x \; dx = xe^x - e^x + C$$

مثال ۱۶.۱۰ حل انتگرال $\int x \sin x dx$

حل. جزء x را برابر u و عبارت $\sin x dx$ را برابر dv می گیریم و

$x = u \quad \Rightarrow$ دیفرانسیل می گیریم تا du بدست آید $\Rightarrow \; dx = du$

$\sin x dx = dv \; \Rightarrow$ انتگرال می گیریم تا مقدار v بدست آید $\Rightarrow \; -\cos x = v$

$$\int x \sin x dx = (x)(-\cos x) - \int -\cos x \; dx = -x \cos x + \sin x + C$$

روش جزء به جزء گفته شده در بالا را می توان به شکل جدولی زیر بیان نمود که در اکثر موارد جواب خواهید گرفت:

انتگرال		مشتق
dv	$+$	u
$\vdots$	$-$	$\vdots$

با مشتقگیری پیاپی از سمت چپ و انتگرال پیاپی از سمت راست، تا جائی روند را ادامه خواهیم داد که مشتق صفر شود. سپس با انتصاب علامت $+$ و $-$ بترتیب و ضرب مورب عبارات، حاصل انتگرال را می نویسیم. به مثال زیر توجه نمائید:

مثال ۱۷.۱۰ مطلوبست حل انتگرال $\int x^{3}e^{2x}\,dx$

حل. جزء x^{3} را برابر u می گیریم زیرا مشتقات پیاپی آن به صفر خواهد رسید و جزء $e^{2x}dx$ را برابر dv می گیریم که قابل انتگرالگیری است لذا

مشتق		انتگرال
x^{3}	+	e^{2x}
$3x^{2}$	-	$\frac{1}{2}e^{2x}$
$6x$	+	$\frac{1}{4}e^{2x}$
6	-	$\frac{1}{8}e^{2x}$
0		$\frac{1}{16}e^{2x}$

$$\int x^{3}e^{x}\,dx=+x^{3}\frac{1}{2}e^{2x}-3x^{2}\frac{1}{4}e^{2x}+6x\frac{1}{8}e^{2x}-6\frac{1}{16}e^{2x}+C$$

اگرچه مهمترین روشهای انتگرالگیری، روش های جزء به جزء و جانشینی هستند اما در برخی از انتگرالها لازم است از روشهای متعدد و ترکیبی استفاده شود تا به جواب نهائی برسیم. یکی از مهمترین و پرکاربردترین انتگرال ها در ریاضی انتگرالی است که در مثال زیر خواهیم دید. حل این انتگرال با دو بار استفاده از روش جزء به جزء انجام می گیرد.

مثال ۱۸.۱۰ مطلوبست حل انتگرال های زیر که در آن a و b اعداد حقیقی مفروضی‌اند.

$$I=\int e^{ax}\sin bx\;dx \qquad ; \qquad J=\int e^{ax}\cos bx\;dx$$

حل. با شروع جزء به جزء از I می نویسیم:

$$I \text{ جزء به جزء روی } \begin{cases} e^{ax}=u\Longrightarrow ae^{ax}=du\\ \sin bxdx=dv\Longrightarrow -\frac{1}{b}\cos bx=v.\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad I=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}J \qquad (\dagger)$$

$$J \text{ جزء به جزء روی } \begin{cases} e^{ax}=u\Longrightarrow ae^{ax}=du\\ \cos bxdx=dv\Longrightarrow \frac{1}{b}\sin bx=v.\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad J=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}I \qquad (\ddagger)$$

از $(\dagger)$ و $(\ddagger)$ می توان دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} I-\frac{a}{b}J=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx\\ J+\frac{a}{b}I=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx.\end{cases}$ را تشکیل داد. با حل دستگاه داریم:

$$\begin{aligned} I &=\int e^{ax}\sin bx\;dx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^{2}+b^{2}}\;e^{ax}+C\\ J &=\int e^{ax}\cos bx\;dx=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^{2}+b^{2}}\;e^{ax}+C\end{aligned}$$

تمرین ۵.۱۰ حاصل انتگرال های زیر را با روش جزء به جزء بیابید.

$$(a)\quad \int xe^{5x}\,dx \quad,\quad (b)\quad \int x\sin 2x\,dx \quad,\quad (c)\quad \int x^{2}\sin x dx$$
$$(d)\quad \int x^{2}e^{x}dx \quad,\quad (e)\quad \int x^{3}e^{2x}dx \quad,\quad (f)\quad \int x^{3}\cos x dx$$
$$(g)\quad \int e^{2x}\sin 3x dx \quad,\quad (h)\quad \int e^{-4x}\cos 2x dx \quad,\quad (i)\quad \int \ln x\,dx$$

۲.۱۰ انتگرال معین و کاربردها

ساده ترین کاربرد انتگرال، محاسبهٔ سطح و حجم است که در ذیل آنها را ذکر خواهیم نمود. در ابتدا به تعریف انتگرال معین می پردازیم.

گیریم تابع $y = f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد. به انتگرالی به شکل

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

انتگرال معین اطلاق می شود که بین دو حد $x = a$ **(حد پائین)** و $x = b$ **(حد بالا)** قرار می‌گیرد و بدین صورت تعریف می شود که اگر $F(x)$ تابع اولیهٔ $f(x)$ باشد چنانکه

$$F'(x) = f(x)$$

آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

بنابراین با حل انتگرال بصورت نامعین و بدون در نظر گرفتن حدود آن، تابع اولیه را بدست آورده و سپس با جایگذاری حدود بالا و پائین (بترتیب) در تابع اولیه و بدست آوردن تفاضل آنها حاصل انتگرال معین بصورت یک **عدد حقیقی** حاصل می شود. شایان ذکر است که حاصل انتگرال معین یک عدد حقیقی است در حالیکه حاصل انتگرال نامعین یک تابع است.

مثال ۱۹.۱۰ مطلوبست مقدار انتگرال معین زیر

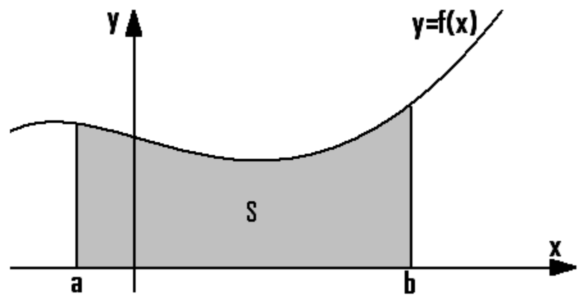
$$I = \int_2^3 \frac{2x+1}{x^{2}+x+1}dx$$

حل. طبق مثال ۵.۱۰ و گفته های فوق چنین می نویسیم:

$$I = \int_2^3 \frac{2x+1}{x^{2}+x+1}dx = \ln(x^{2}+x+1)\Big|_2^3 = \ln 13 - \ln 7 = \ln\frac{13}{7}$$

تعبیر هندسی انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ عبارتست از مجموع سطح محصور حاصل از قسمتهای مثبت و منفی نمودار تابع $f(x)$ و محور x−ها از $x=a$ تا $x=b$ یعنی

$$S=\int_a^b f(x)\ dx$$

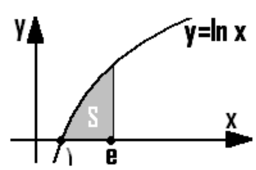


شکل ۱.۱۰ تعبیر انتگرال معین را می توان مقدار مساحت زیر منحنی یک تابع بیان نمود.

مثال ۲۰.۱۰ مطلوبست سطح زیر منحنی $y=\ln x$ و محور x−ها از ۱ $= x$ تا $x=e$.

حل. از روش جزء به جزء مشخص می شود که $\int \ln x\ dx = x\ln x - x$ و بنابراین

$$S=\int_۱^e \ln x\ dx = x\ln x - x\Big|_۱^e = (e\ln e - e)-(۱\ln ۱ - ۱)=۱$$



شکل ۲.۱۰ مساحت زیر نمودار منحنی $y=\ln x$ از ۱ تا e

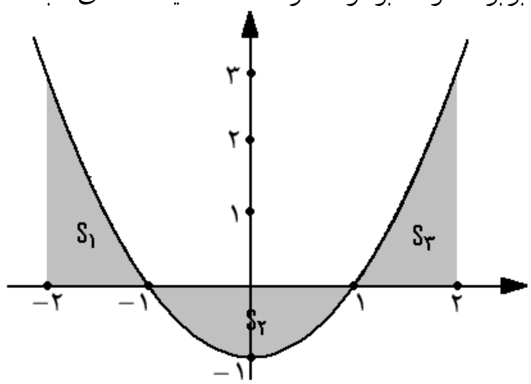
در یافتن سطح بین دو نمودار ذکر این نکته ضروری است که می بایست قسمت های منفی سطح که زیر محور طولها واقع می شود را مثبت نمود تا جواب صحیح حاصل شود. بدین منظور قسمتهای مختلف سطح را بر حسب اینکه زیر محور واقع شوند یا بالای محور، جداگانه محاسبه نموده و همه را با علامت مثبت جمع می زنیم.

مثال ۲۱.۱۰ سطح محصور بین منحنی $y=x^۲-۱$ و محور x−ها را از $x=-۲$ تا $x=۲$ پیدا کنید.

حل. مطابق شکل ۳.۱۰ از آنجائیکه محور طولها، منحنی تابع را به سه ناحیه تقسیم نموده، ما نیز سه مساحت مختلف را جداگانه محاسبه و حاصل را جمع می کنیم. بدین ترتیب:

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} x^2 - 1 = \frac{4}{3} \quad , \quad S_2 = \int_{-1}^{1} x^2 - 1 = -\frac{4}{3} \quad , \quad S_3 = \int_{1}^{2} x^2 - 1 = \frac{4}{3}$$

و مساحت مجموع برابر ۴ خواهد بود و مقدار مساحت همیشه عددی مثبت است.



شکل ۳.۱۰ مساحت زیر نمودار منحنی مثال ۲۱.۱۰

مطلب ۲.۱۰ سطح محصور بین دو منحنی مثبت و پیوسته[۴] $y = f(x)$ و $y = g(x)$ که $f(x) \geq g(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ عبارتست از

$$S = \int_a^b \big(f - g\big)(x)\ dx$$

مثال ۲۲.۱۰ سطح محصور بین دو منحنی $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$ را پیدا کنید.

حل. از $x^2 = \sqrt{x}$ نتیجه می شود که نقاط برخورد دو منحنی عبارتند از $x = 0$ و $x = 1$ و در این فاصله $\sqrt{x} \geq x^2$ پس طبق فرمول فوق، سطح محصور بین دو منحنی برابر است با

$$S = \int_a^b (f - g)(x)dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\ dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

مطلب ۳.۱۰ در روشهای انتگرالگیری مثل جانشینی و جزء به جزء، می بایست در روند اجرای روش، حدود انتگرالها را نیز تغییر داده و در محاسبه اعمال نمائیم. مثالهای زیر را ببینید:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\sqrt{\cos x}dx = -\int_1^{\frac{1}{2}} \sqrt{u}\ du = -\frac{2}{3}\sqrt{u^3}\Big|_1^{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{8}} + \frac{2}{3} = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}$$

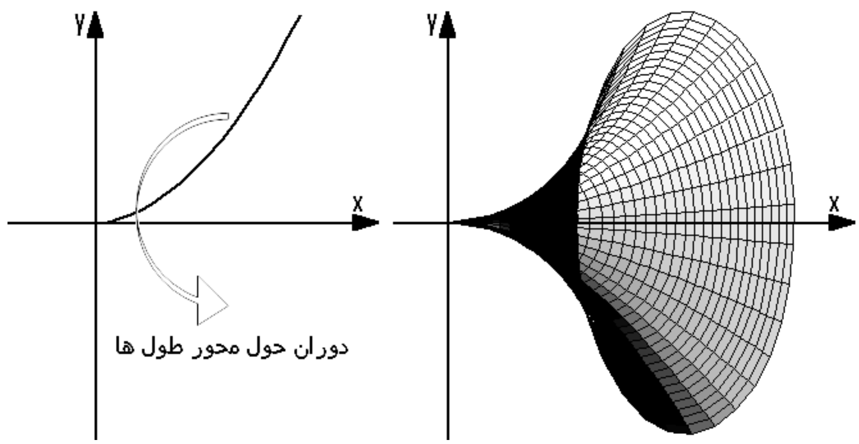
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos x\ dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x\ dx = \frac{\pi}{12} - (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

مطلب ۴.۱۰ هرگاه $y = f(x)$ تابعی مثبت و پیوسته روی بازهٔ $[a,b]$ باشد و حول محور x–ها دوران کند، سطح حاصل از دوران y عبارتست از $A = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\ dx$ و حجمی که ایجاد می کند برابرست با $V = \int_a^b \pi y^2 dx$.

مثال ۲۳.۱۰ حجم حاصل از دوران منحنی $y = x^2$ که از ۰ تا ۲ حول محور x–ها دوران می کند را بیابید.

حل. شکل ۴.۱۰ دوران تابع $y = x^2$ را بدور محور طول ها نشان می دهد. مقدار حجم حاصل از دوران برابرست با

$$V = \int_0^2 \pi (x^2)^2 dx = \pi \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$



شکل ۴.۱۰ حجم حاصل از دوران منحنی $y = x^2$ حول محور طول ها

تمرین ۶.۱۰ .

۱) سطح محصور بین دو منحنی $y = 4 - x^2$ و $y = -2x + 4$ را پیدا کنید.

۲) مطلوبست سطح محصور بین دو منحنی $y = \ln x$ و $y = \ln^2 x$.

۳) سطح محصور بین دو منحنی $y = \frac{1}{1+x^2}$ و $y = \frac{1}{2}x^2$ را پیدا کنید.

۴) مساحت ناحیه‌ای را بیابید که از طرف راست به خط $y = x - 2$، از طرف چپ به سهمی $y = \sqrt{x}$ و از پایین به محور x–ها محدود است. شکل محدوده را نیز رسم کنید.

۵) سطح و حجم حاصل از دوران منحنی $y = \sqrt{x}$ که از ۰ تا ۲ حول محور x–ها دوران می کند را بیابید. شکل این حجم ایجاد شده را رسم کنید.

۱.۲.۱۰ خواص انتگرال معین

برای سهولت در محاسبهٔ انتگرال های معین، از خواص آن که در ذیل بیان می شود بهره می‌گیریم.
اگر $f(x)$ تابع حقیقی پیوسته و a، b، c و k اعدادی حقیقی باشند سپس

$$\begin{aligned}
\int_a^a f(x)dx &= 0\\
\int_a^b f(x)dx &= -\int_b^a f(x)dx\\
\int_a^c f(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx\\
\int_a^b kf(x)dx &= k\int_a^b f(x)dx\\
\int_a^b k\ dx &= k(b-a)
\end{aligned}$$

بعلاوه انتگرال صعودی است یعنی اگر $f(x) \leq g(x)$ باشد سپس $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ و در نتیجه برای تابع کرانداری مانند $f(x)$ اگر $m \leq f(x) \leq M$ خواهیم داشت

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

مثال ۲۴.۱۰ ثابت کنید $\int_0^\pi \sin\sqrt{x}\ dx < 4$

حل. از آنجاکه $\sin\sqrt{x} \leq 1$ با انتگرال گیری از طرفین نامساوی در بازهٔ $[0, \pi]$ داریم

$$\int_0^\pi \sin\sqrt{x}\ dx \leq \int_0^\pi 1\ dx = \pi < 4$$

مطلب ۵.۱۰ اگرتابع $f(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته باشد، **مقدارمتوسط** f دراین بازه عبارتست از

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

در واقع مقدار متوسط تابع، خطی افقی را نشان می دهد که مساحت نواحی بالای تابع و پائین تابع حول آن مساوی است.

مثال ۲۵.۱۰ مقدار متوسط تابع $y = \sin x$ را در بازهٔ $[0, \pi]$ بیابید.

حل. با استفاده از فرمول بالا

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y\ dx = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^\pi \sin x\ dx = \frac{1}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi} \sim 0/63$$

۲.۲.۱۰ مشتق انتگرال

اگر u و v توابع مشتقپذیر بر حسب x باشند، مشتق انتگرال بر حسب x چنین تعریف می شود:

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = v'f(v) - u'f(u)$$

مثال ۲۶.۱۰ مشتق انتگرال $\int_{2x-1}^{x^2}(3t-1)dt$ را بیابید.

$$\frac{d}{dx}\int_{2x-1}^{x^2}(3t-1)dt = (x^2)'(3x^2-1)-(2x-1)'(3(2x-1)-1) = 6x^3-14x+8$$

۳.۲.۱۰ انتگرال مجازی

در انتگرال های معین گاهی حدود روی بازه های نامتناهی قرار دارند و یا بعبارتی لازم است مساحت توابع را روی نواحی نامحدود محاسبه شوند مانند برخی توابع آماری. اینگونه حدود نامتناهی نوعی انتگرال غیرطبیعی ایجاد می کنند.

برای تابع پیوستهٔ $y = f(x)$ در فاصلهٔ $[a,\infty)$، **انتگرال مجازی** یا **ناسَره** بشکل زیر بیان و تفسیر می گردد:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x)dx \qquad , \qquad a < B \in \mathbb{R}$$

اگر این حد موجود باشد انتگرال را **همگرا** و در غیر اینصورت آنرا **واگرا** گوئیم. بهمین صورت برای تابع پیوستهٔ f در فاصلهٔ $(-\infty, b]$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)dx \qquad , \qquad b > A \in \mathbb{R}$$

برای انتگرالی که حدود آن هر دو نامتناهی اند بازاء هر ثابت c می نویسیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

مثال ۲۷.۱۰ برای ثابت منفی k انتگرال $f(x) = e^{kx}$ روی $[0,\infty)$ همگراست، زیرا:

$$\int_0^\infty e^{kx}dx = \lim_{B\to\infty}\int_0^B e^{kx}dx = \lim_{B\to\infty}\frac{e^{kx}}{k}\Big|_0^B = \lim_{B\to\infty}\frac{e^{kB}-1}{k} = -\frac{1}{k}$$

مثال ۲۸.۱۰ روی $[1,\infty)$ انتگرال تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ واگراست. داریم:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{B\to\infty}\int_1^B \frac{1}{x}dx = \lim_{B\to\infty}\ln|B| = \infty \qquad , \qquad 1 < B \in \mathbb{R}$$

مثال ۲۹.۱۰ انتگرال تابع $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ روی اعداد حقیقی همگراست (شکل۸.۷)، زیرا بازاء هر ثابت حقیقی c

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx &= \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{c}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{c} \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{B\to\infty}\int_{c}^{B} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{A\to-\infty} \arctan x\Big|_A^c + \lim_{B\to+\infty} \arctan x\Big|_c^B \\
&= \left(\arctan c - \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arctan c\right) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

ممکن است با وجود پیوستگی تابع روی یک بازه، تابع در نقاط انتهائی بیکران شود (کراندار نباشد) در اینگونه موارد **انتگرال مجازی** $\int_a^b f(x)dx$ نیز قابل تعریف است. اگر تابع $f(x)$ در $(a,b]$ پیوسته باشد ولی در $x=a$ وجود نداشته باشد می نویسیم:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$$

و اگر $f(x)$ در $[a,b)$ پیوسته باشد ولی در $x=b$ بی کران باشد، سپس

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a}^{b-\epsilon} f(x)dx$$

مثال ۳۰.۱۰ حاصل انتگرال $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ چیست؟

حل. تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ روی بازهٔ $(0,1]$ پیوسته است ولی در صفر بیکران است می نویسیم:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\ln\varepsilon = \infty$$

پس انتگرال واگراست.

مثال ۳۱.۱۰ تابع $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ در بازهٔ $(0,1]$ پیوسته است و انتگرال مجازی آن در این بازه چنین است:

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 1-\sqrt{\varepsilon} = 1$$

و نشان می دهد که این انتگرال مجازی همگراست.

تمرین ۷.۱۰ .

۱) بدون محاسبهٔ انتگرال ها نشان دهید:

$$(a)\ \frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{dx}{x+10} < \frac{1}{5}\ ,\quad (b)\ \int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} \leq \frac{1}{2}\ ,\quad (c)\ \int_0^1 \frac{\sin x\ dx}{1+x^2} \leq 1$$

۲) مقدار متوسط تابع $y=\cos^2 x$ در فاصلهٔ $[0,\pi]$ چیست؟

۳) مشتق انتگرال $\int_{x^2}^{x^3} (t^2+1)dt$ را نسبت به x بیابید.

۴) حاصل انتگرال مجازی $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\ dx$ چیست؟

۵) همگرائی انتگرال مجازی $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\ dx$ را بررسی نمائید.

۴.۲.۱۰ معادلات دیفرانسیل

هر معادله که شامل حداقل یکی از مشتقات (اعم از مشتق اول، دوم، سوم،...) باشد را معادلهٔ دیفرانسیل نامیم، مثلاً $y'+2y=4x$ و $y-y''+2x=4y'$ دو معادلهٔ دیفرانسیل محسوب می‌شوند. آنچه در این نوع معادلات مهم است یافتن تابعی مانند y است که در معادله صدق کند و این y را **جواب معادلهٔ دیفرانسیل** نامیم. می توانید ببینید که تابع $y=x^2+3$ جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $y'-2x=0$ می باشد. با انتگرالگیری از طرفین یک معادلهٔ دیفرانسیل، می‌توان جواب آنرا بدست آورد.

مثال ۳۲.۱۰ مطلوبست حل معادلهٔ دیفرانسیل $y'=2x-3$.

حل. از آنجائیکه $y'=\frac{dy}{dx}$ با جایگذاری در معادله دیفرانسیل داریم $\frac{dy}{dx}=2x-3$ پس $dy=(2x-3)dx$ با انتگرالگیری از طرفین می نویسیم:

$$\int dy = \int (2x-3)dx \Longrightarrow y = x^2-3x+C$$

و تابع $y=x^2-3x+C$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل خواهد بود.

جوابی که از این مثال بدست آمده $y=x^2-3x+C$ دارای ثابت C است و به همین خاطر به آن **جواب عمومی** معادله دیفرانسیل اطلاق می کنیم. بازای هر مقدار حقیقی بجای C در جواب عمومی، یک جواب بدست می آید که به آن **جواب خصوصی** معادله دیفرانسیل گوئیم. گاهی یکی از نقاط جواب مفروض در مسئله داده می شود که به آن **شرط اولیه** گوئیم. با جایگذاری شرط اولیهٔ معادله دیفرانسیل در جواب عمومی، یک جواب خصوصی حاصل می‌گردد.

مثال ۳۳.۱۰ حل معادلهٔ دیفرانسیل $e^x dx - ydy = ۰$ با شرط اولیهٔ $y(۰) = ۲$.

حل.

$$\begin{aligned} e^x dx &= ydy \\ \int e^x dx &= \int ydy + C \\ e^x &= \frac{y^۲}{۲} + C \end{aligned}$$

که جواب عمومی است و با جایگذاری شرط اولیه در جواب عمومی $e^\circ = ۲ + C$ و یا $C = -۱$ که این مقدار در جواب عمومی، جواب خصوصی $e^x = \frac{y^۲}{۲} - ۱$ را مشخص می کند.

مثال ۳۴.۱۰ حل معادلهٔ دیفرانسیل $۳x^۲dx + \cos ydy = ۰$ با شرط اولیهٔ $y(۱) = \pi$.

حل.

$$\begin{aligned} ۳x^۲dx &= -\cos ydy \\ \int_۱^x ۳x^۲dx &= \int_\pi^y -\cos ydy \\ x^۳\Big|_۱^x &= -\sin y\Big|_\pi^y \\ x^۳ - ۱ &= -\sin y \\ x^۳ &= -\sin y + ۱ \end{aligned}$$

مثال ۳۵.۱۰ حل معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = y - y^۲$ با شرط اولیهٔ $y(۰) = ۲$.

حل.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y - y^۲} &= dx \\ \int \frac{dy}{y(۱ - y)} &= \int dx + C \\ y(x) &= \frac{ke^x}{۱ + ke^x} \end{aligned}$$

با شرط اولیهٔ $y(۰) = ۲$ سپس $k = -۲$ و $y(x) = \frac{-۲e^x}{۱ - ۲e^x}$ جواب خصوصی است.

مثال ۳۶.۱۰ حل معادلهٔ $۲yy' = e^x$

حل. چون $y' = \frac{dy}{dx}$ با جایگذاری در معادله، جواب عمومی معادله چنین بدست می آید:

$$\begin{aligned} ۲y\frac{dy}{dx} &= e^x \\ ۲y\ dy &= e^x\ dx \\ \int ۲y\ dy &= \int e^x\ dx \\ y^۲ &= e^x + C \end{aligned}$$

مطلب ۶.۱۰ معادلهٔ خطی مرتبه اول بصورت

$$y' + p(x)y = q(x)$$

است که $p(x)$ و $q(x)$ توابعی پیوسته از x هستند. برای حل این معادله ابتدا تابع $I(x)$ را که **عامل انتگرالساز** گوئیم از فرمول $I(x) = e^{\int p(x)dx}$ بدست آورده و با جایگذاری در فرمول

$$Iy = \int Iqdx + C$$

جواب عمومی y را بدست می آوریم.

مثال ۳۷.۱۰ حل معادلهٔ $y' - ۳y = ۶$

حل. با داشتن $p = -۳$ عامل انتگرالساز برابر با $I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -۳dx} = e^{-۳x}$ است. با جایگذاری در فرمول

$$ye^{-۳x} = \int ۶e^{-۳x}dx + C$$

و جواب عمومی $y = -۲ + Ce^{۳x}$ خواهد بود.

مثال ۳۸.۱۰ مطلوبست حل معادلهٔ

$$y' - \frac{۴}{x}y = ۲$$

حل. این معادله، معادله خطی مرتبه اول است با $p = -\frac{۴}{x}$ و $q = ۲$ بنابراین

$$\begin{aligned}
I(x) &= e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{۴}{x}dx} = e^{-۴\ln x} = \frac{۱}{x^۴} \\
Iy &= \int Iqdx + C \\
\frac{۱}{x^۴}y &= \int \frac{۱}{x^۴}۲dx + C \\
y &= x^۴\Big(-\frac{۲}{۳x^۳} + C\Big) \\
y &= -\frac{۲}{۳}x + Cx^۴
\end{aligned}$$

تمرین ۸.۱۰ جواب معادلات دیفرانسیلی زیر را بدست آورید.

$$\begin{array}{llllll}
(a) & y' + ۴y = ۰ & , & (b) & y' = y^۲x + y^۲ & \\
(c) & \frac{dy}{dx} - \frac{۱}{x}y = ۲x & , & (d) & y' + y = \sin x & ; \quad y(\frac{\pi}{۴}) = ۲ \\
(e) & \frac{dy}{dx} + \frac{۵}{x}y = ۲ & , & (f) & y' - y = ۱ & ; \quad y(۰) = ۱ \\
(g) & y' = -۲yx^۲ & , & (h) & (۲ - x)dy + (۵ + y)dx = ۰ &
\end{array}$$

تمرین ۹.۱۰ تکمیلی.

۱) انتگرالهای زیر را حل کنید. جواب ها را تا حد امکان ساده نمائید.

$$(۱)\ \int (x^{۳}-۱)(x^{۳}+۱)^{۴}dx, \quad (۲)\ \int \frac{dx}{x\ln^{۲} x}, \quad (۳)\ \int_{۱}^{۲} \ln x\, dx$$

$$(۴)\ \int \frac{۲x-۱}{x^{۳}-۵x^{۲}+۶x}dx, \quad (۵)\ \int \frac{۲x-۱}{x^{۴}-۱}\, dx, \quad (۶)\ \int x^{۴}e^{۴x}\, dx$$

$$(۷)\ \int \frac{x+۲}{x^{۴}-۲x^{۲}+۱}dx, \quad (۸)\ \int \frac{dx}{\sin x\cos x}, \quad (۹)\ \int \ln^{۳} x\ \ dx$$

$$(۱۰)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}-۱)}, \quad (۱۱)\ \int \frac{e^{۳x}+۱}{e^{x}+۱}dx, \quad (۱۲)\ \int_{۰}^{۱} \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\, dx$$

$$(۱۳)\ \int_{۴}^{۵} \frac{dx}{x^{۲}-۴x+۳}, \quad (۱۴)\ \int \frac{\sqrt{۱+\ln x}}{x}dx, \quad (۱۵)\ \int \frac{x\ dx}{x^{۴}+۳}$$

$$(۱۶)\ \int_{۱}^{۲} ۲x^{۲}\sqrt{۴x-۳}dx, \quad (۱۷)\ \int_{۰}^{۲} \frac{dx}{(x-۱)^{۲}}, \quad (۱۸)\ \int \cos(\ln x)dx$$

$$(۱۹)\ \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin(\cos x)\sin x dx, \quad (۲۰)\ \int \frac{dx}{\sin x}, \quad (۲۱)\ \int x^{۳}\ln^{۲} x\, dx$$

$$(۲۲)\ \int \sqrt{\frac{۱-x}{x}}\frac{dx}{x^{۲}}, \quad (۲۳)\ \int x(۱+x)^{۵۰}dx, \quad (۲۴)\ \int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}} \frac{۱}{\sin^{۲} x}\, dx$$

$$(۲۵)\ \int \frac{۳x^{۳}}{(x^{۲}-۵)^{\frac{۳}{۲}}}dx, \quad (۲۶)\ \int x^{۳}\cos x\, dx, \quad (۲۷)\ \int_{e^{۲}}^{e} \frac{dx}{x\ln x}$$

$$(۲۸)\ \int e^{-۳x}\sin ۴x\, dx, \quad (۲۹)\ \int \frac{\cos^{۳} x}{\sin x}\, dx, \quad (۳۰)\ \int \frac{dx}{\sqrt{(۱-x^{۲})^{۳}}}$$

$$(۳۱)\ \int \frac{x^{۵}-۲x^{۴}+x}{x^{۲}+۱}dx, \quad (۳۲)\ \int_{۰}^{\infty} e^{۶x}dx, \quad (۳۳)\ \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$(۳۴)\ \int \frac{dx}{\sin^{۲} x+۴\cos^{۲} x}, \quad (۳۵)\ \int \frac{e^{۲x}}{e^{۲x}+۱}\, dx, \quad (۳۶)\ \int \tan^{۲} x\, dx$$

$$(۳۷)\ \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} ۳\sin ۲x\cos x dx, \quad (۳۸)\ \int_{۰}^{\infty} e^{-۴x}dx, \quad (۳۹)\ \int_{۰}^{\infty} ۸e^{۱-۴x}dx$$

$$(۴۰)\ \int \frac{dx}{(x-۳)(x^{۲}+۵)}, \quad (۴۱)\ \int_{۰}^{۳} [x]+۳xdx, \quad (۴۲)\ \int \frac{x^{۵}+x^{۳}+x}{x^{۴}+x^{۲}+۱}dx$$

$$(۴۳)\ \int \frac{x-۱}{۲x^{۲}+۲x-۱۲}dx, \quad (۴۴)\ \int_{۲}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}, \quad (۴۵)\ \int_{۱}^{۲} \frac{۱}{\sqrt{۵x-۱}}\, dx$$

$$(۴۶)\ \int \frac{x^{۴}+x-۸}{x^{۳}-x}dx, \quad (۴۷)\ \int_{۰}^{\infty} \sin x\, dx, \quad (۴۸)\ \int \frac{(x+۵)dx}{x^{۳}+x^{۲}-۲x}$$

$$(۴۹)\ \int_{۴}^{-۳} |x+۱|+[x]dx, \quad (۵۰)\ \int_{-۲}^{۲} (۲|x-۱|+۳|x+۱|-۲[۲x]-۴)\, dx$$

$$(۵۱)\ \int_{۳}^{۱۰} \frac{x+۹}{x^۳+۶x^۲}dx \quad , \quad (۵۲)\ \int_{۰}^{۱} x^{-\frac{۱}{۲}}dx \quad , \quad (۵۳)\ \int_{۰}^{\infty} \frac{dx}{۱+x^۲}$$

$$(۵۴)\ \int_{۰}^{\infty} e^{-۲x}dx \quad , \quad (۵۵)\ \int_{-\infty}^{۰} e^{۵x}dx \quad , \quad (۵۶)\ \int_{۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{x}}dx$$

$$(۵۷)\ \int_{۵}^{\infty} \frac{۱}{(x-۳)^۲}dx \quad , \quad (۵۸)\ \int_{۱}^{\infty} \frac{x^۲}{x^۳+۸}dx \quad , \quad (۵۹)\ \int_{-\infty}^{-۱} \frac{۱}{x^۴}dx$$

$$(۶۰)\ \int_{۳}^{\infty} \frac{۱}{(x-۲)^{\frac{۵}{۴}}}dx \quad , \quad (۶۱)\ \int_{۰}^{\infty} \frac{۳dx}{(۳x+۱)^۴} \quad , \quad (۶۲)\ \int_{۱}^{\infty} \frac{۳}{x^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$(۶۳)\ \int_{۰}^{\infty} xe^{-۲x^۲}dx \quad , \quad (۶۴)\ \int_{۰}^{\infty} \frac{x^۲}{x^۳+۳} \quad , \quad (۶۵)\ \int_{-\infty}^{۳} \frac{dx}{\sqrt{۵-x}}$$

$$(۶۶)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۲e^{-x}}{e^{-x}+۳}dx \quad , \quad (۶۷)\ \int_{-\infty}^{۰} \frac{۶}{(x-۶)^۶}dx \ , \quad (۶۸)\ \int_{۱}^{۲} \frac{(x^۲-۱)dx}{x(x^۲+۱)}$$

۲) بدون محاسبهٔ انتگرالهای زیر نشان دهید:

$$(a)\quad \int_{۰}^{۱} \frac{\sin x}{۱+x^۲}\,dx \le ۱ \quad , \quad (b)\quad \int_{۰}^{\pi} \frac{\sin x}{x^۲+۱}dx \le \pi$$

$$(c)\quad \frac{۱}{۶} < \int_{۰}^{۲} \frac{dx}{x+۱۰} < \frac{۱}{۵} \quad , \quad (d)\quad \int_{۰}^{۲} \frac{۱}{x^۲+۴}dx \le \frac{۱}{۲}$$

$$(e)\quad \int_{-۲}^{۲} x^۳\cos nx\,dx = ۰ \quad , \quad (f)\quad \int_{\frac{-۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} \ln\frac{۱+x}{۱-x}\sin^۲ x dx = ۰$$

۳) برای تابع دو ضابطه‌ای زیر مقدار $\int_{۰}^{۴} f(x)\,dx$ را حساب کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{\sqrt{x}-۱} & ,x \ge ۲ \text{ اگر} \\ \sqrt{x}+۱ & ,x < ۲ \text{ اگر} \end{cases}$$

۴) مساحت زیر نمودار تابع $y = ۲e^{-۲x}$ را روی ناحیهٔ $[۰,\infty)$ بیابید.

۵) مقدار سطح زیر نمودار تابع $y = (۲x+۳)^{-۳}$ را روی ناحیهٔ $[۲,\infty)$ حساب کنید.

۶) مساحت زیر نمودار تابع $y = x^{-\frac{۴}{۵}}$ را روی ناحیهٔ $[۵,\infty)$ پیدا نمائید.

۷) سطح محصور بین دو منحنی $f(x) = x^۲+۱$ و $g(x) = ۳۳ - x^۲$ را بیابید.

۸) سطح محصور بین دو منحنی $y = \frac{\ln x}{۴x}$ و $y = x\ln x$ را پیدا کنید.

۹) سطح محصور بین دو منحنی $f(x) = ۲x^۲+x$ و $g(x) = x^۲+۲$ را بیابید.

۱۰) سطح محصور بین دو منحنی $f(x) = x^۴ - ۷x + ۱$ و $g(x) = x+۱$ را بیابید.

۱۱) مساحت دو ناحیه‌ای را بیابید که از منحنی $y = \frac{۱}{۲}x^۲$ و درون دایرهٔ $x^۲+y^۲ = ۸$ پدید می آیند.

۱۲) حجم حاصل از دوران تابع $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ حول محور x–ها را از $\frac{\pi}{6}$ تا $\frac{\pi}{3}$ بیابید.

۱۳) ناحیه‌ای که به منحنی $y = 2e^{-2x}$، خط $x = 1$ و محورهای مختصات محدود شده است را حول محور x–ها دوران می دهیم. حجم حاصل از این دوران چیست؟

۱۴) ناحیه‌ای محدود به خطوط $y = 2x$، $y = 3x$ و $x + y = 4$ را حول محور x–ها دوران می دهیم. حجم حاصل از این دوران را بیابید.

۱۵) ناحیه‌ای که به منحنی $y = x^2$ و خط $y = x + 6$ محدود شده است را حول خط $y = 3$ دوران می دهیم. حجم حاصل از این دوران چیست؟

۱۶) سطح و حجم حاصل از دوران خط $y = 2x + 1$ که از -1 تا ۲ حول محور x–ها دوران می کند را بیابید. شکلی از این حجم ایجاد شده را رسم کنید.

۱۷) حجم سطل زباله‌ای را بیابید که ارتفاع آن ۳۰ سانتیمتر، قطر قاعدهٔ پائینی اش ۱۰ سانتیمتر و قطر قاعدهٔ بالائی آن ۱۵ سانتیمتر است.

۱۸) اگر $p(x)$ یک چندجمله‌ای دلخواه باشد با روش جزء به جزء نشان دهید

$$\int pe^x dx = e^x(p - p' + p'' - p''' + \cdots)$$

با این فرمول حاصل انتگرال $\int x^9 e^x dx$ را بنویسید.

۱۹) برای تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب T ثابت کنید: $\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$

۲۰) مقدار متوسط تابع $y = 2^x$ در بازهٔ $[0, 1]$ چقدر است؟

۲۱) حاصل حدود زیر را بدست آورید.

$$(a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \frac{t}{t^2+1}dt}{x^4} \quad , \quad (b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x} e^{t^2}dt}{x^3} \quad , \quad (c)\quad \lim_{x\to \infty} \frac{\int_x^{x+1} \ln t^2 dt}{x-1}$$

۲۲) معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول زیر را حل کنید.

$$(a)\quad y' + 4y = 0 \quad , \quad (b)\quad y' = y^2 x + y^2$$

$$(c)\quad \frac{dy}{dx} + \frac{5}{x}y = 0 \quad , \quad (d)\quad y' + y = \sin x$$

$$(e)\quad (e^x - 1)y' + e^x y = 0 \quad , \quad (f)\quad y' + \frac{1}{x}y = 2\cos 2x$$

$$(g)\quad y' + 2xy = 3x \quad , \quad (h)\quad (2 - x)dy + (5 + y)dx = 0$$

$$(i)\quad y' = -2yx^2 \quad , \quad (j)\quad y\sin x dx - \cos x dy = 0$$

۲۳) معادلهٔ دیفرانسیلی که دارای مشتق دوم y'' است را **معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه دو** گویند. با دوبار مشتق گیری از تابع $y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$ نشان دهید این تابع جواب معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه دو $y'' + k^2 y = 0$ است (k ثابتی حقیقی است).

۲۴) **(فیزیک)** متحرکی در حرکت روی محور طولها، دارای سرعت $v(t) = 4t + 5\frac{m}{s}$ است. سرعت متوسط متحرک را در سه ثانیهٔ اول حرکت بیابید.

۲۵) **(فیزیک)** اگر معادلهٔ سرعت متحرکی بصورت $v(t) = 3t^3 - 4t^2 + 5$ باشد، سرعت متوسط متحرک را در بازهٔ زمانی $[2s, 4s]$ بیابید. شتاب این متحرک چیست؟

۲۶) **(فیزیک)** معادلهٔ مکان متحرکی روی محور x—ها چنین است:

$$x(t) = 4t^2 + 2t - 6$$

سرعت متوسط متحرک را در فاصلهٔ $[3s, 5s]$ پیدا کنید.

۲۷) **(فیزیک)** طبق قانون توریچِلّی[2] سرعت خروج آب یک ظرف از یک سوراخ دایره ای شکل در عمق h زیر سطح آب تقریباً $0/6\sqrt{2gh}$ است. نشان دهید که اگر در کف استوانه ای پر از آب با ارتفاع H و شعاع R سوراخی مدور با شعاع r ایجاد کنیم مدت زمانی که طول می کشد تا تمام آب خارج شود برابر است با

$$\frac{R^2}{0/6 r^2}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

۲۸) **(نجوم)** مسلماً با فرورفتن در اعماق زمین می بایست فشار وارده مرتباً افزایش یافته و این مقدار فشار بر ساختار عناصر درونی زمین تاثیر فراوان دارد. در واقع ساختار مواد درونی زمین که می بایست درون کرهٔ خاکی حفظ شود نتیجهٔ تعادل جاذبه و فشار است که آن را **تعادل هیدرواستاتیک** نامند. در اثر تعادل هیدرواستاتیک، فشار وارده بر جسمی در عمق r از سطح زمین تابع تغییرات جاذبه و فشار وارده از سطوح فوقانی بوده و با فرمول

$$P(r) = -\int_r^R g(x)\rho(x)dx$$

داده می شود که R شعاع زمین، $g(x)$ شتاب گرانش و $\rho(x)$ چگالی در عمق x می باشند. با فرض یکنواختی درون زمین و ثابت بودن چگالی آن، نشان دهید فشار در مرکز زمین برابرست با

$$P_{center} = \frac{3\mathbf{G}M^2}{8\pi R^4}$$

این فرمول در مورد تمام سیارات صادق است. با این فرمول فشار در عمق زمین برابر ۳/۶ مگابار و تقریباً ۳ مگابار در مرکز زهره است.

[2] $Torricelli\ Evangelista$(۱۶۰۸ − ۱۶۴۷)

۲۹) **(زیست)** داروئی در لحظهٔ t با آهنگ $f(t)\dfrac{cm^۳}{min}$ به بیماری تزریق می شود. مساحت زیر نمودار $f(t)$ از $t=۰$ تا $t=۴min$ معرف چیست؟

۳۰) **(اقتصاد)** فرض کنید $f(t)$ نمایش سرمایهٔ شرکتی در لحظهٔ t باشد. آهنگ تغییر سرمایه $f'(t)$ را **آهنگ سرمایه خالص** نامند. فرض کنید مدیران شرکت به این نتیجه رسیدند که بهترین سطح سرمایه گذاری در این شرکت C تومان بوده و در هر لحظه، آهنگ سرمایه خالص باید متناسب با تفاضل C و مقدار کل سرمایه شرکت باشد. معادلهٔ دیفرانسیلی که بیانگر این وضعیت است را پیدا کرده و جواب آنرا بیابید.

۳۱) **(اقتصاد)** الگوئی که رابطهٔ بین قیمت و فروش محصولی را توضیح می دهد عبارتست از

$$\frac{dy}{dp}=-k\frac{y}{p+c}$$

که در آن y مقدار فروش، p قیمت فروش هر واحد و k و c ثابتند. این معادله را حل کنید.

۳۲) **(اقتصاد)** درآمد نهائی برای تولید x واحد از کالائی برابر $MR=-۳۰x+۸۰۰$ تومان است. معادلهٔ تقاضا را برای این کالا پیدا کنید.

۳۳) **(علوم اجتماعی)** فرض کنید رشد جمعیت یک کشور بواسطه تولد و میزان ثابت C مهاجرت با جمعیت متناسب است، دراینصورت جمعیت N در معادله دیفرانسیل

$$\frac{dN}{dt}=kN+C$$

برای ثابتهای مثبت C و k صدق می کند. نشان دهید

$$N=N_۰e^{kt}+\frac{C}{k}(e^{kt}-۱)$$

که $N_۰$ جمعیت اولیه است.

۳۴) **(شیمی)** سیستمی را بسته گوئیم اگر بین آن سیستم و محیط ماده‌ای جابجا نشود. از آنجائیکه متعارفترین کاری که روی یک سیستم بسته ترمودینامیکی انجام می گیرد تغییر در حجم سیستم است، پس در یک سیستم بسته (مانند پیستون) متناسب با تغییر فشار، تغییرات حجم حاصل می شود. مقدار انرژی لازم برای این فرآیند برگشت پذیر[۳] عبارتست از

$$W=-\int_۱^۲ PdV$$

[۳] فرآیند برگشت پذیر فرآیندی است که نزدیک به حالت تعادل عمل نموده چنانکه با تغییر خیلی جزئی می تواند به حالت قبلی خود بازگردد. مسلماً چنین فرآیندی ذهنی است.

که ۱ و ۲ حالتهای اولیه و نهائی سیستم‌اند. طبق این فرمول در یک تراکم، کار انجام شده بر روی سیستم مثبت است $\Delta W > 0$ درحالی که در انبساط، کار انجام شده بر روی سیستم منفی خواهد بود $\Delta W < 0$. اما فشار نه تنها به حجم بلکه به دمای سیستم وابسته است و بنابراین فرمول کار سیستم ترمودینامیکی در یک فرآیند بسته و برگشت پذیر با ترکیب ثابت مواد آن، عبارتست از

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} P(T,V)dV$$

که در آن حجم از V_1 به V_2 رسیده است.

(الف) در سیستم بسته با دمای ثابت و فشار $P(V) = \frac{1}{V}$ اگر حجم از $V_1 = 400cm^3$ تا $V_2 = 900cm^3$ تغییر کند، مقدار کار W برای انجام فرآیند چیست؟

(ب) در سیستم بسته با دمائی ثابت اگر فشار دارای تابعی به شکل $P(V) = e^{-V}$ بوده و حجم از $V_1 = 100cm^3$ تا $V_2 = 800cm^3$ تغییر کند، کار W برای انجام فرآیند را بیابید.

(ج) یک گاز غیرکامل به آرامی گرم و بطور برگشت پذیر در فشار ثابت $500torr$ از حجم $200cm^3$ به $350cm^3$ منبسط می شود. دما بر حسب ژول چیست؟

فصل ۱۱

کاربردهائی از انتگرال

بسیاری از قوانین طبیعت که در علومی مانند فیزیک، شیمی، نجوم، علوم مهندسی، زیست شناسی و . . . مطرح می شوند را می توان با الگوهای ریاضی بیان و تحلیل نمود. هرچند درک تجربی این علوم مبنای ریشه‌ای شناخت در آنهاست با وجود این دید ریاضی از پدیده ها، درک بیشتری برای ما فراهم می آورد. مطالبی چون قانون جاذبه عمومی نیوتن، قوانین ترمودینامیک، حرکت سیارات، شکست نور و بسیاری دیگر از مفاهیم فیزیک و نجوم و دیگر علوم را در ریاضیات می‌توان جست و در قالب فرمول های ریاضی آورد و ما مختصراً در ذیل به آنها می پردازیم.

۱.۱۱ استاتیک

یادآوری می کنیم که واحدهای بکار رفته در این کتاب عبارتند از

دستگاه	نیرو	شتاب	جرم M	طول L
mks	نیوتن N	$\frac{m}{s^2}$	کیلوگرم kg	متر m
cgs	دین dyne	$\frac{cm}{s^2}$	گرم gr	سانتیمتر cm
انگلیسی	پوند lb	$\frac{ft}{s^2}$	اسلاگ $slug$	فوت ft

تبدیلات عددی متداول عبارتند از

$$1mil = 1609m \quad , \quad 1ft = 30/48cm \ , \quad 1in = 2/54cm$$

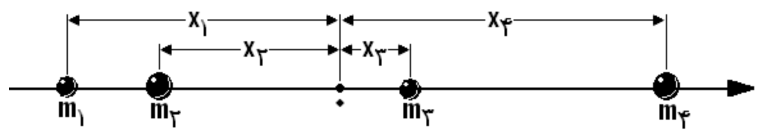
$$1slug = 14/59kg \quad , \quad 1lb = 453/6gr \quad , \quad 1j = 6/242 \times 10^{18} eV$$

۱.۱.۱۱ مرکز جرم

از کاربردهای مقدار متوسط یک تابع، ارتباط با مفهوم مرکز جرم است. هرگاه بر جسمی نیرو وارد شود این نیرو بر تمام ذرات جسم موثر است ولی می توان گفت که برآیند تمام این نیروهای وارده بر جسم تنها بر یک نقطهٔ خاص متمرکز است که این نقطه **مرکز جرم جسم** نامیده می شود.

مرکز جرم یک سیستم k−جرمی: فرض کنید تعداد k جرم $m_۱$، $m_۲$، $\cdots$، m_k بر روی محور x−ها و در مکان های بترتیب $x_۱$، $x_۲$، $\cdots$، x_k واقعند (شکل ۱.۱۱). این سیستم k−جرمی را بطور واحد در نظر گرفته و مایلیم تا مرکز جرم $G(\overline{x})$ این سیستم را بیابیم. طبق فرمول گشتاور برای این k جرم داریم:

$$m_۱x_۱ + m_۲x_۲ + \cdots + m_kx_k = (m_۱ + m_۲ + \cdots + m_k)\overline{x}$$



شکل ۱.۱۱ سیستم ۴−جرمی واقع بر محور طول ها

که $\overline{x}$ مکانی است که این k جرم حول آن در حال تعادلند و آنرا **مرکز جرم دستگاه** نامیم. از این جا داریم:

$$\overline{x} = \frac{m_۱x_۱ + m_۲x_۲ + \cdots + m_kx_k}{m_۱ + m_۲ + \cdots + m_k}$$

با بکارگیری نماد $\sum$ برای مجموع تعدادی از عناصر ریاضی، این فرمول چنین می شود:

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=۱}^{k} m_ix_i}{\displaystyle\sum_{i=۱}^{k} m_i}$$

و $M = \displaystyle\sum_{i=۱}^{k} m_i$ مقدار **جرم کل سیستم k−جرمی** است.

مثال ۱.۱۱ تعداد ۴ جرم ۴ و ۵ و ۲ و ٦ کیلوگرمی روی محور طولها در مکانهای بترتیب ۲+ و ۷+ و ۴− و ۱+ واقعند. مرکز جرم این چهار جرم در کجای محور طولها واقعست؟

حل. طبق فرمول، مرکز جرم این سیستم ۴–جرمی چنین است:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=۱}^{۴} m_i x_i}{\sum_{i=۱}^{۴} m_i} = \frac{۴ \times (+۲) + ۵ \times (+۷) + ۲ \times (-۴) + ٦ \times (+۱)}{۴ + ۵ + ۲ + ٦} = ۲/۴۱$$

برای k–جرم که در صفحهٔ مختصات واقع هستند نیز می توان فرمول مرکز جرم را بر حسب مختص های طول و عرض بدست آورد (شکل۲.۱۱). گیریم تعداد k جرم $m_۱$، $m_۲$، $\cdots$، m_k در صفحهٔ مختصات و در مکان های بترتیب $\Big|_{y_۱}^{x_۱}$، $\Big|_{y_۲}^{x_۲}$، $\cdots$، $\Big|_{y_k}^{x_k}$ واقعند. اگر M_x گشتاور اجرام حول محور x–ها باشد سپس

$$M_x = m_۱ y_۱ + m_۲ y_۲ + \cdots + m_k y_k \quad , \quad (kg.m)$$

اگر M_y گشتاور اجرام حول محور y–ها باشد سپس

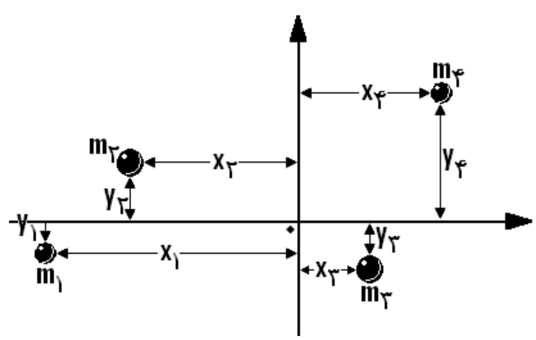
$$M_y = m_۱ x_۱ + m_۲ x_۲ + \cdots + m_k x_k \quad , \quad (kg.m)$$

جرم کل سیستم $M = m_۱ + m_۲ + \cdots + m_k$ و برای مختصات مرکز جرم $G(\overline{x}, \overline{y})$ داریم

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} \quad , \quad \overline{y} = \frac{M_x}{M}$$

با جایگذاری

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=۱}^{k} m_i x_i}{\sum_{i=۱}^{k} m_i} \quad , \quad \overline{y} = \frac{\sum_{i=۱}^{k} m_i y_i}{\sum_{i=۱}^{k} m_i}$$



شکل ۲.۱۱ سیستم ۴–جرمی در صفحه مختصات دکارتی

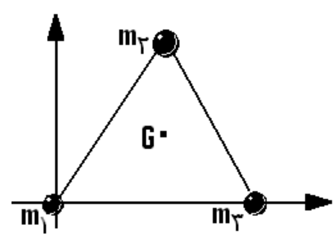
مثال ۲.۱۱ سه جرم $m_۱ = ۱۰gr$، $m_۲ = ۳۰gr$ و $m_۳ = ۱۶gr$ در مکانهای بترتیب $(۰,۰)$، $(۴,۰)$ و $(۲/۵, ۳/۵)$ در صفحهٔ مختصات در تعادلند (شکل۳.۱۱). مرکز جرم این سه جرم کجاست؟

حل. طبق فرمول مرکز جرم داریم:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=۱}^{k} m_i x_i}{\sum_{i=۱}^{k} m_i} = \frac{۱۰ \times ۰ + ۳۰ \times ۴ + ۱۶ \times ۲/۵}{۱۰ + ۳۰ + ۱۶} = \frac{۱۶۰}{۵۶} \approx ۲/۸۶$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=۱}^{k} m_i y_i}{\sum_{i=۱}^{k} m_i} = \frac{۱۰ \times ۰ + ۳۰ \times ۰ + ۱۶ \times ۳/۵}{۱۰ + ۳۰ + ۱۶} = \frac{۵۶}{۵۶} = ۱$$

و نقطهٔ $G(۲/۸۶, ۱)$ مرکز جرم این سیستم ۳—جرمی است.



شکل ۳.۱۱ مرکز جرم سه جسم در صفحه مختصات دکارتی از مثال ۲.۱۱

مرکز جرم یک سیم: سیمی به جرم M در نظر بگیرید. در حالت کلی ممکن است که این سیم جسمی یکنواخت نبوده و بنابراین بطور موضعی نیز دارای چگالی یکنواخت نخواهد بود. چگالی سیم را تغییرات جرم معرفی نموده و چنانچه $m(s)$ تابع جرم برحسب s طول واحد جرم در سیم باشد، سپس چگالی $\rho(s)$ میزان تغییرات جرم خواهد بود یعنی

$$\rho(s) = \frac{d}{ds} m(s)$$

و چون برای جرم صفر چگالی صفر است لذا $\rho(۰) = ۰$ و جرم عبارت خواهد بود از

$$m(s) = \int_۰^s \rho(\sigma) d\sigma$$

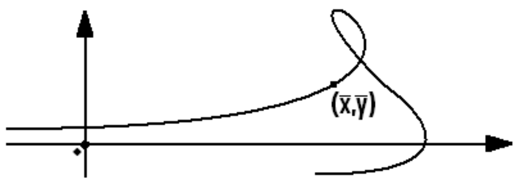
اما سیم یک سیستم $k-$جرمی است که تعداد ذرات آن بینهایت است و لذا طبق قواعد ریاضی، مجموع ها به انتگرال تبدیل شده و مرکز جرم برای سیمی بطول l چنین خواهد بود:

$$\overline{x} = \frac{\int_{0}^{l} x\rho(s)ds}{\int_{0}^{l} \rho(s)ds} \quad , \quad \overline{y} = \frac{\int_{0}^{l} y\rho(s)ds}{\int_{0}^{l} \rho(s)ds}$$

که می توان نوشت $\overline{x} = \frac{M_y}{M}$ و $\overline{y} = \frac{M_x}{M}$ و جرم کل سیستم عبارتست از

$$M = \int_{0}^{l} \rho(s)ds$$

در اینجا بازهٔ $[0, l]$ طول سیم است و می توان در شکل پارامتر در بازهٔ $a \leq t \leq b$ نیز مطرح نمود.



شکل ۴.۱۱ مرکز جرم یک سیم با چگالی غیریکنواخت

مطلب ۱.۱۱ برای منحنی $y = f(x)$ که f تابعی مشتقپذیر است داریم $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$ و برای منحنی پارامتری $\big(x(t), y(t)\big)$ نیز این مقدار برابر با $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$ است. طول یک منحنی روی بازهٔ $[a, b]$ عبارتست از

$$l = \int_{a}^{b} ds$$

برای سیمی که دارای چگالی یکنواخت در تمام طول خود است، برای محاسبهٔ مرکز جرم $G(\overline{x}, \overline{y})$ از فرمول های فوق، ثابت $\rho(s)$ از صورت و مخرج حذف شده و در نتیجه مرکز جرم سیم از روابط

$$\overline{x} = \frac{\int_{0}^{l} xds}{l} \quad , \quad \overline{y} = \frac{\int_{0}^{l} yds}{l}$$

بدست آمده و در این حالت، مرکز جرم را **مرکزگون** نامیم.

مثال ۳.۱۱ مرکز جرم سیمی به شکل نیمدایره با فرمول $x^2 + y^2 = R^2$ که بالای محور طول‌ها قرار می گیرد را بیابید (شکل۵.۱۱).

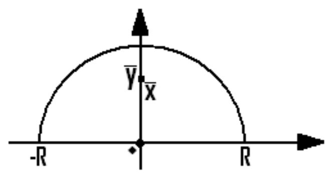
حل. از فرمول دایره می نویسیم $y = \sqrt{R^۲ - x^۲}$ که $-R \leq x \leq R$ و $y \geq ۰$، بنابراین $y' = \frac{-x}{\sqrt{R^۲ - x^۲}}$. در نتیجه

$$ds = \sqrt{۱ + y'^۲}\, dx = \sqrt{۱ + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^۲ - x^۲}}\right)^۲}\, dx = \frac{R}{\sqrt{R^۲ - x^۲}}\, dx$$

سپس

$$\begin{aligned} M &= \int_{-R}^{R} ds = \int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^۲ - x^۲}}\, dx = \pi R \\ M_y &= \int_{-R}^{R} x ds = \int_{-R}^{R} \frac{xR}{\sqrt{R^۲ - x^۲}}\, dx = ۰ \quad \Rightarrow \overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{۰}{\pi R} = ۰ \\ M_x &= \int_{-R}^{R} y ds = \int_{-R}^{R} \frac{yR}{\sqrt{R^۲ - x^۲}}\, dx = ۲R^۲ \Rightarrow \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{۲R^۲}{\pi R} = \frac{۲R}{\pi} \end{aligned}$$

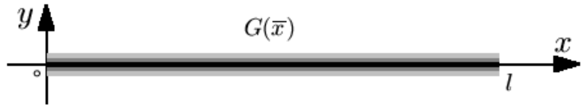
و نقطهٔ $G(۰, \frac{۲R}{\pi})$ مرکز جرم این نیمدایره است.



شکل ۵.۱۱ مرکز جرم یک سیم نیمدایره‌ای شکل مثال ۳.۱۱

مطلب ۲.۱۱ (مرکز جرم یک میله) میله‌ای بطول l را بر محور طولها تصور کنید که نقطهٔ شروع آن بر مبداء بیافتد و انتهای آن نقطهٔ $(l, ۰)$ خواهد بود. گیریم چگالی خطی این میله در مکان $x(m)$ از مبداء برابر $\rho(x)$ کیلوگرم بر متر است. مرکز جرم میله $G(\overline{x})$ وقتی $M(kg)$ جرم کل میله باشد برابر $\overline{x}M = M_y$ است و سپس

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_{۰}^{l} x\rho(x)dx}{\displaystyle\int_{۰}^{l} \rho(x)dx}$$



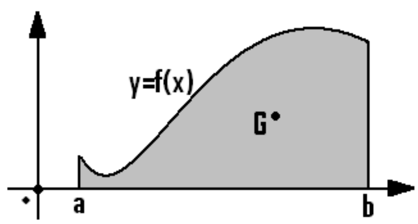
شکل ۶.۱۱ مرکز جرم در یک میله

مثال ۴.۱۱ میله‌ای بطول ۸ سانتیمتر را بر محور طولها قرار داده چنانکه انتهای چپ آن بر مبداء منطبق است. اگر چگالی آن برای هر $\circ \leq x \leq ۸$ برابر $\rho(x) = ۱ + x^۲$ گرم بر سانتیمتر مکعب باشد، مرکز جرم آنرا بیابید؟

حل. طبق فرمول بالا و جایگذاری مقادیر داریم:

$$\overline{x} = \frac{\int_\circ^l x\rho(x)dx}{\int_\circ^l \rho(x)dx} = \frac{\int_\circ^۸ x(۱+x^۲)dx}{\int_\circ^۸ (۱+x^۲)dx} = \frac{\frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۴}x^۴\Big|_\circ^۸}{x + \frac{۱}{۳}x^۳\Big|_\circ^۸} = \frac{۳۹۶}{۶۷} = ۵/۹۱ cm$$

مرکزگون یک جسم مسطح: منحنی تابع پیوستهٔ $y = f(x)$ را در صفحهٔ مختصات روی بازهٔ $[a, b]$ در نظر گرفته و مایلیم تا مرکز جرم ناحیه زیر این منحنی را بیابیم.



شکل ۷.۱۱ مرکز جرم یک جسم جامد در صفحه مختصات دکارتی

با حذف جزئیات خسته کننده، می توان گشتاور حول محور x–ها را چنین بدست آورد:

$$M_y = \int_a^b x\rho(x)f(x)dx \quad (kg.m)$$

و گشتاور حول محور y–ها نیز عبارت است از

$$M_x = \frac{۱}{۲}\int_a^b \rho(x)f^۲(x)dx \quad (kg.m)$$

هرگاه $M(kg)$ جرم کل ناحیه باشد سپس

$$M = \int_a^b \rho(x)f(x)dx \quad (kg)$$

اگر نقطهٔ $G(\overline{x}, \overline{y})$ مرکز جرم ناحیه باشد از $\overline{x} = \frac{M_y}{M}$ و $\overline{y} = \frac{M_x}{M}$ داریم:

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x\rho(x)f(x)dx}{\int_a^b \rho(x)f(x)dx} \quad , \quad \overline{y} = \frac{\frac{۱}{۲}\int_a^b \rho(x)f^۲(x)dx}{\int_a^b \rho(x)f(x)dx}$$

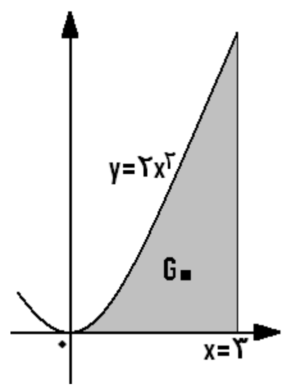
و در حالتی که چگالی ورقه ثابت باشد با حذف آن از کسر داریم:

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \quad , \quad \overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

می توان گفت برای ورقه ای با چگالی ثابت و مساحت A مرکزگون $G(\overline{x},\overline{y})$ عبارتست از

$$\overline{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)dx \quad , \quad \overline{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{1}{2A}\int_a^b f^2(x)dx$$

مثال ۵.۱۱ مرکزگون ورقه‌ای محدود به محور طولها و نمودار $y = 2x^2$ و خط $x = 3$ را بیابید؟ چگالی ورقه یکنواخت است.



شکل ۸.۱۱ مرکز جرم جسم مثال ۵.۱۱

حل. طبق فرمولها

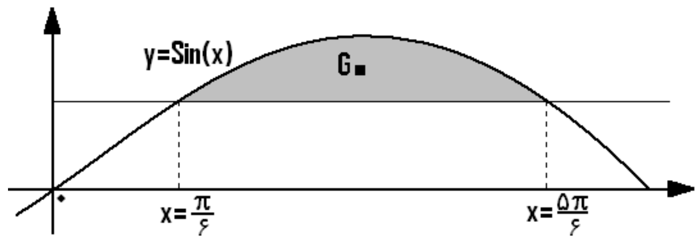
$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 (2x^2)dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^3 = \frac{2\times 3^3}{3} = 18 \\ M_y &= \int_0^3 x(2x^2)dx = \frac{2}{4}x^4\Big|_0^3 = \frac{1}{2}3^4 \\ M_x &= \frac{1}{2}\int_0^3 (2x^2)^2dx = \frac{2}{5}x^5\Big|_0^3 = \frac{2}{5}3^5 \end{aligned}$$

سپس

$$\overline{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{9}{4} \quad , \quad \overline{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{27}{5}$$

و $G(\frac{9}{4},\frac{27}{5})$ مرکزگون ناحیه است.

مثال ۶.۱۱ مرکزگون ناحیهٔ محدود به منحنی $y = \sin x$ که بین $[\circ, \pi]$ و محدود به خط $y = \frac{۱}{۲}$ است را بیابید.



شکل ۹.۱۱ مرکز جرم جسم جامد مثال ۶.۱۱

حل. محل برخورد تابع $y = \sin x$ و خط $y = \frac{۱}{۲}$ نقاط $x = \frac{\pi}{۶}$ و $x = \frac{۵\pi}{۶}$ بوده و طبق فرمولها داریم:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}} = \sqrt{۳} \\ M_y &= \int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}} x \sin x dx = (-x\cos x + \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}} = \frac{\pi\sqrt{۳}}{۲} \\ M_x &= \frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}} \sin^{۲} x dx = \frac{۱}{۲}\big(\frac{x}{۲} - \frac{\sin ۲x}{۴}\big)\Big|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}} = \frac{\sqrt{۳}}{۸} + \frac{\pi}{۶} \end{aligned}$$

سپس

$$\overline{x} = \frac{\frac{\pi\sqrt{۳}}{۲}}{\sqrt{۳}} = \frac{\pi}{۲} \qquad , \qquad \overline{y} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۸} + \frac{\pi}{۶}}{\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۸} + \frac{\pi}{۶\sqrt{۳}}$$

مرکزگون یک جسم دوار: می دانیم از دوران یک شکل حول یک خط، حجمی ناصفر پدید خواهد آمد و مرکزگون ناحیه مسلماً بر این محور دوران قرار خواهد داشت. اکنون منحنی تابع پیوستهٔ نامنفی $y = f(x)$ را روی $[a, b]$ در نظر گرفته و آنرا حول محور x–ها دوران می دهیم (شکل ۴.۱۰). از دوران این تابع حجمی ایجاد می شود که دارای مرکزگون واقع بر محور x–ها است زیرا حجم پدید آمده حول این محور متقارن است. بنابراین کافی است تنها مختص $\overline{x}$ را از مرکزگون $G(\overline{x}, \circ, \circ)$ بیابیم. اگر مجموع گشتاورها حول محور x–ها را در فضای سه بعدی xyz با M_{yz} نشان دهیم، سپس برای این جسم با چگالی ثابت k داریم:

$$M_{yz} = k\pi \int_a^b x[f(x)]^{۲} dx$$

جرم جسم عبارتست از

$$M = k\pi \int_a^b [f(x)]^۲ dx$$

لذا مرکز جرم جسم نقطهٔ $G(\overline{x}, ۰, ۰)$ است چنانکه

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\int_a^b x[f(x)]^۲ dx}{\int_a^b [f(x)]^۲ dx}$$

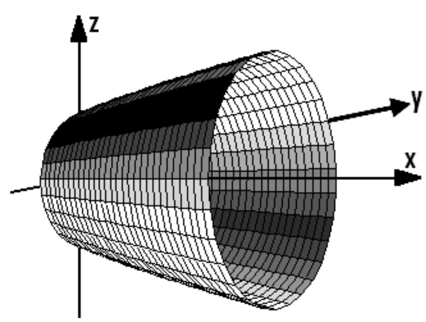
از حذف k در این معادله مشخص می شود که مرکزگون یک جسم دوار **همگن**، فقط به شکل جسم بستگی دارد نه به جنس آن. بنابراین برای جسم دوار همگن بجای گشتاور جرم، کافیست گشتاور جسم را در نظر گرفته و از آنجا که گشتاور جسم نسبت به صفحهٔ yz عبارتست از

$$M_{yz} = \pi \int_a^b x[f(x)]^۲ dx$$

بدین ترتیب مرکزگون جسم با حجم V نقطهٔ $G(\overline{x}, ۰, ۰)$ است چنانکه

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{V}$$

مثال ۷.۱۱ ناحیهٔ محدود به منحنی $y = \sqrt{x + ۱}$ که بین $[۰, ۳]$ است را دوران می دهیم. مرکزگون حجم حاصل چیست؟



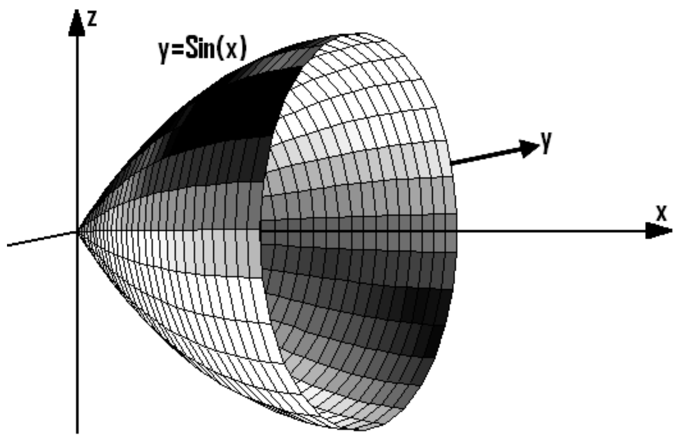
شکل ۱۰.۱۱ مرکزگون مثال ۷.۱۱

حل. طبق فرمولهای فوق چنین می نویسیم

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x[f(x)]^۲ dx}{\int_a^b [f(x)]^۲ dx} = \frac{\int_۰^۳ x(x + ۱) dx}{\int_۰^۳ (x + ۱) dx} = \frac{۹}{۵}$$

و مرکزگون جسم نقطهٔ $G(\frac{۹}{۵}, ۰, ۰)$ است.

مثال ۸.۱۱ ناحیهٔ محدود به منحنی $y=\sin x$ که بین $[\circ, \frac{\pi}{۲}]$ واقعست را دوران می دهیم. مرکزگون حجم حاصل چیست؟



شکل ۱۱.۱۱ مرکزگون مثال ۸.۱۱

حل. طبق فرمولهای فوق $\overline{x}$ عبارتست از

$$\overline{x}=\frac{\displaystyle\int_a^b x[f(x)]^۲dx}{\displaystyle\int_a^b [f(x)]^۲dx}=\frac{\displaystyle\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} x\sin^۲ x dx}{\displaystyle\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} \sin^۲ x dx}=\frac{\frac{۱}{۱۶}(۴+\pi^۲)}{\frac{\pi}{۴}}=\frac{۴+\pi^۲}{۴\pi}$$

و مرکزگون جسم نقطهٔ $G(\frac{۴+\pi^۲}{۴\pi}, \circ, \circ)$ است.

فرض کنید ناحیه‌ای بین دو منحنی پیوسته و نامنفی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ روی $[a,b]$ حول محور x−ها دوران کند، از آنجا که سطح محصور بین این دو منحنی $\int_a^b |f-g|(x)dx$ است، با دوران آن حول محور x−ها مرکزگون جسم نقطهٔ $G(\overline{x}, \circ, \circ)$ است چنانکه

$$\overline{x}=\frac{M_{yz}}{M}=\frac{\displaystyle\int_a^b x[f^۲(x)-g^۲(x)]dx}{\displaystyle\int_a^b [f^۲(x)-g^۲(x)]dx}$$

با دانستن مرکزگون نیز می توان از **قضیهٔ پاپوس** برای حجم اجسام دوار استفاده نموده و حجم جسم را یافت. این قضیه چنین بیان می کند که اگر S ناحیهٔ محصور به دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ باشد و محور x−ها را قطع نکرده و همچنین $G(\overline{x},\overline{y})$ مرکزگون ناحیهٔ S باشد، سپس حجم حاصل از دوران S حول محور x−ها عبارتست از $۲\pi\overline{y}S$.

تمرین ۱.۱۱ .

۱) تعداد ۵ جرم ۲۰ و ۳۰ و ۱۰ و ۴۰ و ۷۵ گرمی روی محور طولها در مکانهای بترتیب ۳− و ۲− و ۱ و ۲ و ۵ واقعند. مرکز جرم این پنج جرم در کجای محور طولها واقعست؟

۲) چهار ذره به جرمهای ۲ و ۴ و ۳ و ٦ اسلاگ بترتیب روی محور y−ها در مکانهای بترتیب ۴− و ۵ و ۲ و ۳ واقعند. مرکز جرم این ذرات کجاست؟

۳) مرکز جرم چهار ذرهٔ $۱gr$، $۳gr$ و $۲gr$ و $۴gr$ که بترتیب در نقاط $(۳,۴)$، $(۴,۲)$ و $(۲,۳)$ و $(−۵,۱)$ در صفحهٔ مختصات در تعادلند، کجاست؟

۴) چهار جرم ۵، ۲، ۱، ۳ کیلوگرمی بترتیب در نقاط $(۱,۱)$، $(۳,۲)$ و $(−۱,۸)$ و $(−۳,۰)$ در صفحهٔ مختصات واقعند. جرم پنجمی بجرم ۱ کیلوگرم را در کدام مکان قرار دهیم که مرکزجرم این پنج جرم در مبداء مختصات قرار گیرد.

۵) در مثال ۳.۱۱ مرکز جرم سیمی نیمدایره‌ای شکل بدست آمده است. مطلوبست مرکزجرم قوسی دلخواه از این سیم بین ۰ و زاویه دلخواه θ وقتی $۰ < \theta \leq \pi$ است.

٦) مرکزگون یک قوس از منحنی پارامتری $\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(۱ - \cos t). \end{cases}$ را برای $۰ \leq t \leq ۲\pi$ پیدا کنید. این منحنی به **منحنی چرخزاد** معروف است.

۷) مرکزگون منحنی پارامتری $\begin{cases} x = e^t, \\ y = ۱. \end{cases}$ را برای $۰ \leq t \leq ۱$ پیدا کنید.

۸) میله‌ای بطول ۱٦ سانتیمتر را بر محور طولها قرار داده چنانکه انتهای چپ آن بر مبداء منطبق است. اگر چگالی خطی آن برای هر $۰ \leq x \leq ۱٦$ برابر $\rho(x) = ۴(۱٦ - x)$ گرم بر سانتیمتر باشد، مرکز جرم میله را بیابید؟

۹) میله‌ای یکنواخت بطول ۱۲ سانتیمتر حاصل اتصال دو میلهٔ فلزی آهنی (با چگالی ۷/۸) بطول ۴ سانتیمتر و میلهٔ مسی (با چگالی ۸/۹) بطول ۸ سانتیمتر در کنار هم است. مرکز جرم این میله را بیابید.

۱۰) چگالی میله‌ای با طول ۱۵ سانتیمتر که بر روی محور x−ها قرار گرفته چنانکه انتهای چپ آن بر مبداء واقعست، با تابع $\rho(x) = ۳e^{-۲x}\frac{kg}{m^۳}$ تغییر می کند. مطلوبست جرم میله و مرکز جرم آن.

۱۱) چگالی میله‌ای با طول ۵/۰ متر از یکسرآن تا انتهای دیگر بطور خطی تغییر می کند. اگر چگالی دو سر آن $۲/۳\frac{kg}{m^۳}$ و $۳/۵\frac{kg}{m^۳}$ باشد، مطلوبست مرکز جرم این میله.

۱۲) میله‌ای بطول ۵۰ سانتیمتر چنان ساخته شده که از ابتدای آن تا $\frac{۱}{۳}$ طولش چگالی از $۳\frac{kg}{m^۳}$ تا $۸\frac{kg}{m^۳}$ بطور خطی زیاد شده و از $\frac{۱}{۳}$ تا انتهای آن چگالی‌اش بطور خطی کم می شود و به مقدار $۵\frac{kg}{m^۳}$ می رسد. مرکز جرم این میله چیست؟

۱۳) مرکزگون ناحیهٔ محدود به نیم دایرهٔ $y=\sqrt{۹-x^{۲}}$ و محور طولها را محاسبه نمائید.

۱۴) مرکزگون ناحیه ای محدود به محور طولها و نمودار $y=\sin x$ که بین خطوط $x=۰$ و $x=\frac{\pi}{۲}$ قرار دارد را بیابید.

۱۵) مرکزگون ناحیهٔ محدود به سهمی $y=x^{۲}+۱$ و محور طولها و خطوط $x=\pm ۱$ چیست؟

۱٦) مرکزگون ورقه ای محدود به سهمی $y=۴x^{۲}+x-۴$ و بین $۰\leq x\leq ۴$ را بیابید که چگالی سطح هر نقطهٔ آن $\rho(x)=\sqrt{۴-x}\frac{kg}{m^{۳}}$ باشد.

۱۷) ناحیهٔ محدود به منحنی $y=x^{۲}+x+۱$ که بین $[۰,۱]$ است را دوران می دهیم. مرکزگون حجم حاصل چیست؟

۱۸) ناحیه‌ای که به منحنی $y=۲e^{-۲x}$، خط $x=۱$ و محورهای مختصات محدود شده است را حول محور x−ها دوران می دهیم. مرکزگون حجم حاصل از این دوران چیست؟

۱۹) ناحیه‌ای محدود به خطوط $y=۲x$، $y=۳x$ و $x+y=۴$ را حول محور x−ها دوران می دهیم. مرکزگون حجم حاصل از این دوران را بیابید.

۲۰) ناحیه‌ای که به منحنی $y=x^{۲}$ و خط $y=x+٦$ محدود شده است را حول خط $y=۹$ دوران می دهیم. مرکزگون حجم حاصل چیست؟

۲۱) مرکزگون مخروطی مستدیر قائم را با شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h بیابید.

۲۲) با استفاده از قضیهٔ پاپوس حجم واشری با سطح مقطع دایره بشعاع ۲ میلیمتر و پهنای دو سانتیمتر را بیابید.

۲۳) با استفاده از قضیهٔ پاپوس حجم کره‌ای به شعاع ۵ سانتیمتر را حساب کنید.

۲.۱.۱۱ فشار مایع

می دانیم که هر مایع بر جداره ظرف خود نیرو وارد می کند و اگر جسمی درون آن باشد نیز بر آن نیرو وارد می سازد. وزن مایع بالای جسم نیروئی بر جسم وارد کرده و مقدار این نیروی وارده (F) بر واحد سطح جسم (A) را **فشار** نامیم و با P نشان می دهیم. داریم:

$$P(pa)=\frac{F(N)}{A(m^{۲})}$$

که در mks فشار بر حسب پاسکال سنجیده می شود و یک پاسکال برابر یک نیوتن بر متر مربع است. اگر $\rho(\frac{kg}{m^{۳}})$ چگالی مایع و $h(m)$ عمق جسم درون مایع باشد، مقدار نیروئی است که بر جسمی با سطح A وارد می شود برابر با وزن مایع بالای جسم است پس

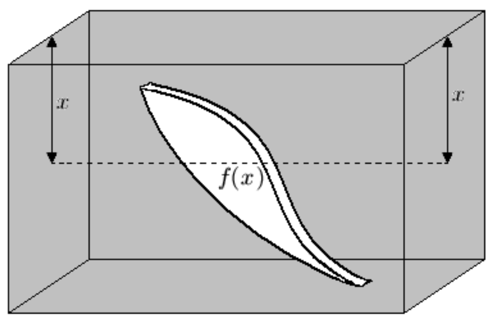
$$F=mg=\rho.V.g=\rho.Ah.g$$

و فشار حاصل بر جسم برابرست با

$$P = \frac{F}{A} = \rho g h$$

اصل پاسکال می گوید: «در هر نقطه از مایع، فشار در همهٔ جهات یکی است». پس فشار بر روی این سطح صاف بطور یکسان وارد می شود. اما سطح اجسام دارای پستی و بلندی بوده و اجسام خود در ارتفاع نیز متفاوتند و بدین دلیل می بایست فرمول نیرو و فشار را عمومیت دهیم. فرض کنید صفحه‌ای تخت با ضخامت یکسان درون مایعی به چگالی ρ بطور قائم شناور باشد (شکل ۱۲.۱۱). گیریم طول صفحه در عمق x زیر سطح مایع $f(x)$ است (f را روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و مثبت فرض کنید) در اینصورت نیروی F حاصل از فشار مایع بر صفحه عبارتست از

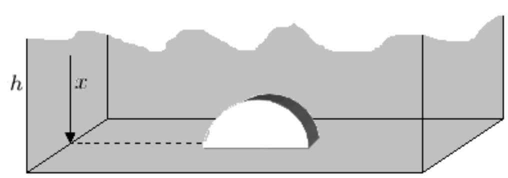
$$F = \int_a^b \rho x f(x) dx$$



شکل ۱۲.۱۱ جسمی با ضخامت یکسان درون یک مایع

اگر $\bar{x}$ طول مرکزگون صفحه باشد پس $\overline{x} = \frac{M_y}{A}$ و از آنجاکه $M_y = \int_a^b x f(x) dx$ است در نتیجه $F = \rho \bar{x} A$ خواهد بود و فشار بطور متوسط بر مرکزگون وارد می شود.

مثال ۹.۱۱ تیغه‌ای نازک بشکل نیمکره‌ای به شعاع ۲ سانتیمتر بر کف ظرفی مکعبی پر از روغن با چگالی ۱/۵۲ قرار گرفته است (شکل ۱۳.۱۱). اگر ارتفاع ظرف یک متر باشد مقدار نیروی وارده بر این نیمکره را محاسبه نمائید.



شکل ۱۳.۱۱ نیمدایره مثال ۹.۱۱

حل. مقطع تیغهٔ نازک نیمکره‌ای شکل را برحسب ارتفاع $x_{(cm)}$ می توان با تابع زیر بیان کرد:

$$f(x) = \begin{cases} \circ & , \quad \circ \leq x < ۹۸ \\ ۲\sqrt{۴ - (۱\circ\circ - x)^۲} & , \quad ۹۸ \leq x \leq ۱\circ\circ \end{cases}$$

مقدار نیروی وارده از مایع بر تیغه چنین خواهد بود:

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b \rho x f(x) dx \\ &= \int_\circ^{۹۸} \rho x \times \circ dx + \int_{۹۸}^{۱\circ\circ} \rho x \times ۲\sqrt{۴ - (۱\circ\circ - x)^۲} dx \\ &= \rho \int_{۹۸}^{۱\circ\circ} ۲x\sqrt{۴ - (۱\circ\circ - x)^۲} dx \\ &= ۱/۵۲ \times \frac{۸}{۳}(۷۵\pi - ۲) \\ &= ۱۱/۹۸\ N \end{aligned}$$

تمرین ۲.۱۱ .

۱) نیروئی که بر بدن فردی در کف استخر به عمق ۴ متر وارد می شود چقدر است. سطح معمول بدن را بصورت افقی یک متر مربع در نظر بگیرید.

۲) نیرو و فشار وارد بر یک ساچمه به قطر ۵ سانتیمتر را که در ته یک لیوان آب به ارتفاع ۱۵ سانتیمتر قرار دارد را حساب کنید.

۳) جسم مذکور در مثال ۸.۱۱ (ابعاد بر حسب سانتیمتر) در کف یک استخر به عمق دو متر قرار دارد. نیروی وارد بر این جسم را بدست آورید.

۴) اگر در مثال ۹.۱۱ چگالی تیغهٔ نیمدایره شکل از بالا به پائین با تابع $\rho(x) = x - ۹۶$ تغییر کند ($۹۸ \leq x \leq ۱\circ\circ$)، مقدار نیروی وارد بر این تیغه را مجدداً محاسبه نمائید.

۳.۱.۱۱ زنجیر آویزان

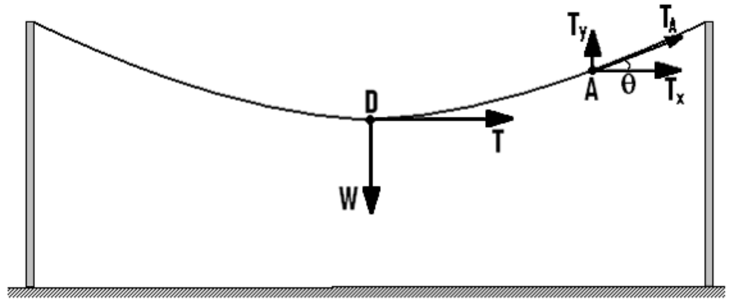
زنجیر قابل انعطافی که دو طرفش را به دو میله (نه لزوماً) هم ارتفاع بسته ایم، آویزان و معلق است. می خواهیم تابع شکل زنجیر[1] را مشخص نمائیم.

از دید مکانیک می توان شکل ۱۴.۱۱ را برای زنجیر تصور کرد. برای زنجیر به وزن W اگر s طول زنجیر بوده و w جرم واحد طول باشد، چنانکه $D\Big|_{h_\circ}^{\circ}$ پائین ترین نقطهٔ زنجیر و T کشش در نقطهٔ D باشد، سپس از آنجا که کشش زنجیر در تمام طول زنجیر یکسان است، برای هر نقطهٔ

[1] $Hanging\ Chain$

دلخواه $A\Big|_y^x$ روی زنجیر می توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} T_x = T_A \cos\theta & , \\ T_y = T_A \sin\theta & . \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = T_A \cos\theta & , \\ W = T_A \sin\theta & . \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = \frac{W}{T}$$



شکل ۱۴.۱۱ زنجیر آویزان

و θ زاویهٔ نیروی T_A مماس در A با افق است. اگر $y = f(x)$ معادلهٔ تعادل زنجیر باشد

$$y' = \tan\theta = \frac{W}{T} = \frac{w}{T}s(x) \qquad (\dagger)$$

که $s(x)$ تابع طول زنجیر است. از مطلب ۱.۱۱ داریم $s'(x) = \sqrt{۱ + (y')^۲}$ و با مشتقگیری از $(\dagger)$ چنین نتیجه می گیریم:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{w}{T}s(x)\right)' = \frac{w}{T}s'(x) = \frac{w}{T}\sqrt{۱ + (y')^۲}$$

و معادلهٔ $y'' = \frac{w}{T}\sqrt{۱ + (y')^۲}$ حاصل می گردد. با فرض $y' = u$ داریم $u' = \frac{w}{T}\sqrt{۱ + u^۲}$ که با انتگرالگیری از آن داریم:

$$\int du = \int \frac{w}{T}\sqrt{۱ + u^۲}dx$$

و بنابراین $u = \sinh(\frac{w}{T}x + C)$ جواب عمومی خواهد بود. چون در D که پائین ترین نقطه است شیب صفر است لذا $u(۰) = ۰ = y'(۰)$ بوده و $C = ۰$ است یعنی $y' = \sinh(\frac{w}{T}x)$ در نتیجه $\int dy = \int \sinh(\frac{w}{T}x)\ dx$ و با حل آن معادلهٔ زنجیر بصورت زیر بدست می آید:

$$y = \frac{T}{w}\cosh(\frac{w}{T}x) + C$$

با اعمال شرط $y(۰) = h_۰$ معادله نهائی زنجیر عبارتست از

$$y = \frac{T}{w}\cosh(\frac{w}{T}x) + h_۰ - \frac{T}{w}$$

یا برای سادگی با فرض $k = \frac{T}{w}$ معادلهٔ $y = k\cosh\frac{x}{k} - k + h_\circ$ معادله نهائی زنجیر آویزان است. شکل حاصل از آویزان شدن زنجیر که با این معادله بیان می گردد را **کاتناری**[۲] یا **منحنی زنجیری** نامند.

تمرین ۳.۱۱ .

۱) دهانه یک پل معلق دو کابلی ۶۰ متر، افت کابل (یعنی فاصله عمودی بین بالاترین و پائین ترین نقطه کابل) ۵ متر و وزن جادهٔ حامل ۵ تن است. کشش در بالاترین و پائین‌ترین نقطه کابل چقدر است؟

۲) بین دو تیر برق ۸ متری، کابلی مسی بوزن ۲۵ کیلوگرم معلق بوده و در تابستان فاصله پائین ترین نقطهٔ کابل تا زمین به ۷ متر می رسد. منحنی زنجیری کابل را یافته و کشش آن را در دو سر تیر بیابید.

۳) هرگاه طول هر قطعهٔ کوچک از یک کابل کشسان با وزن مخصوص یکنواخت، متناسب با کشش کابل در آن قطعه باشد نشان دهید که اگر کابل مزبور در اثر وزن خود آویخته شود، به شکل سهمی خواهد بود.

۴) کدام منحنی واقع در بالای محور طولها، دارای این خاصیت است که طول قوس بین هر دو نقطهٔ روی منحنی، متناسب با سطح واقع در زیر آن قوس است؟

۲.۱۱ دینامیک

طبق قانون دوم نیوتن شتاب a−ی که در یک جسم متحرک با جرم m ایجاد می شود متناسب با مقدار نیروی F است که به آن وارد می شود، یعنی $F \propto a$ و مقدار این تناسب را جرم m به تساوی $F = ma$ مبدل می کند. فرض کنید جسمی به جرم m در راستای محور x−ها در زمان t در مکان $x(t)$ واقع بوده و بر آن نیروی F اثر کند. طبق قانون دوم نیوتن $F = ma$ بوده و سرعت لحظه ای و شتاب لحظه ای جسم اینچنین می باشند:

$$v = \frac{dx}{dt} = x' \quad ; \quad a = \frac{d^{۲}x}{dt^{۲}} = x''$$

که $x(t)$ تابع مکان جسم بر حسب متر، $v(t)$ تابع سرعت لحظه‌ای جسم بر حسب متر بر ثانیه $\frac{m}{s}$ و $a(t)$ تابع شتاب لحظه‌ای جسم بر حسب متر بر مجذور ثانیه $\frac{m}{s^{۲}}$ است. اگر حرکت در راستای محور عرضها باشد بهتر است از متغیر مکان y بجای x استفاده نموده و در حرکات دو بعدی نیز $r(t)$ نمایانگر مکان جسم در لحظهٔ t است. F بر حسب نیوتن N ممکن است ثابت یا متغیر باشد و جرم جسم نیز در مکانیک کلاسیک همواره ثابت و بر حسب کیلوگرم kg است.

[۲] $Catenary$ ماخوذ از کلمه لاتینی $Catena$ بمعنی زنجیر.

۱.۲.۱۱ سقوط اجسام

در حرکت سقوط آزاد که جسمی تحت گرانش زمین سقوط می کند، همواره شتاب گرانشی زمین g بر آن اثر کرده و جسم به سمت پائین کشیده می شود. می خواهیم معادلهٔ حرکت این جسم را بیابیم که از ارتفاع مشخصی سقوط می کند.

فرض کنید که جسمی با جرم m با سرعت اولیه $v_\circ$ در اثر کشش زمین از ارتفاع h سقوط می کند، در اثر کشش زمین می بایست نیروی وزن عامل کشش باشد لذا $ma = mg$ و

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= mg \\ dv &= gdt \\ \int_{v_\circ}^{v} dv &= \int_\circ^t gdt \\ v - v_\circ &= gt \\ v &= gt + v_\circ \end{aligned}$$

معادلهٔ سرعت جسم در حال سقوط است. برای معادلهٔ حرکت می نویسیم:

$$\begin{aligned} v &= gt + v_\circ \\ \frac{dy}{dt} &= gt + v_\circ \\ \int_h^y dy &= \int_\circ^t gt + v_\circ dt \\ y - h &= \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_\circ t \\ y &= \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_\circ t + h \end{aligned}$$

که جواب بشکل $y(t) = \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_\circ t + h$ ظاهر می شود. اگر جسم سقوط آزاد کند $(v_\circ = \circ)$ سپس $y(t) = \frac{۱}{۲}gt^۲ + h$ معادلهٔ حرکت سقوط آزاد است. اکنون فرض کنید که مقاومت هوا نیز از سرعت سقوط می کاهد[۳] و این نیروی مقاوم با ضریب k–ئی از سرعت، طی مسیر بر حرکت جسم اثر می گذارد، پس با فرض $k \geq \circ$ داریم

$$\begin{aligned} mg - kv &= ma \\ ma + kv &= mg \qquad ; \qquad a = v' \\ v' + \frac{k}{m}v &= g \end{aligned}$$

[۳] گاهی آنرا سقوط تاخیری گویند

که معادله‌ای مرتبه اول بوده و طبق مطلب ۶.۱۰، $I = e^{\frac{k}{m}t}$ بنابراین

$$e^{\frac{k}{m}t}v = \int e^{\frac{k}{m}t}g\ dt + C = \frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t} + C$$

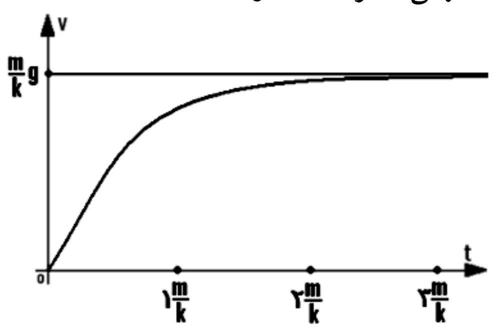
و در نتیجه $v = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}$ معادلهٔ سرعت است. با فرض سقوط آزاد $v_\circ = \circ$ مقدار ثابت $C = -\frac{mg}{k}$ بدست می آید یعنی

$$v = \frac{mg}{k}(۱ - e^{-\frac{k}{m}t})$$

معادلهٔ سرعت سقوط جسم در هواست. نمودار $v(t)$ بصورت شکل ۱۵.۱۱ زیر مشخص می کند که سرعت جسم هرگز از $v_T = \frac{mg}{k}$ تجاوز نخواهد کرد زیرا

$$|v| = \left|\frac{mg}{k}\big(۱ - e^{-\frac{k}{m}t}\big)\right| \leq \frac{mg}{k} = v_T$$

و این مقدار v_T را **سرعت نهائی** یا **سرعت حد** گویند[۴].



شکل ۱۵.۱۱ نمودار سرعت سقوط جسم تحت تاثیر مقاومت هوا

از تمرین ۱۱.۹ (۵۰) برای $-\frac{k}{m} \ll ۱$ می توان نوشت $e^{-\frac{k}{m}t} \approx ۱ - \frac{k}{m}t$ و با جایگذاری در معادلهٔ سرعت داریم:

$$v \approx \frac{mg}{k}\big(۱ - ۱ + \frac{k}{m}t\big) = \frac{mg}{k}\frac{k}{m}t = gt$$

در لحظات اولیهٔ سقوط، حرکت سقوط آزاد است و با افزایش دائمی سرعت و گذشت زمان لازم، $t \to \infty$ سرعت جسم به سرعت نهائی رسیده و سپس مقدار ثابت v_T را خواهد یافت، زیرا

$$\lim_{t\to\infty} v = \lim_{t\to\infty} \frac{mg}{k}(۱ - e^{-\frac{k}{m}t}) = v_T$$

این موضوع برای هر جسمی که در یک سیال سقوط می کند صادق بوده و برای سیالات با چگالی بالاتر سرعت حد کمتر و زمان لازم برای رسیدن سرعت جسم به سرعت حد نیز سریعتر خواهد بود.

---

[۴] *Terminal Velocity*

مثلاً قطره‌ای باران (با شعاع تقریبی ۱/۵ میلیمتر) پس از طی حدود ۱۰ متر به سرعت حدی $v_T = ۷/۵\frac{m}{s}$ خواهد رسید. برای یک چترباز نمایشی با وزن تقریبی ۷۵ کیلوگرم، مقدار سرعت حد حدود ٦۵ متر بر ثانیه است که طی مسافت ۵۰۰ متر به این سرعت می رسد.

برای تعیین معادلهٔ جابجائی جسم از ارتفاع h می نویسیم:

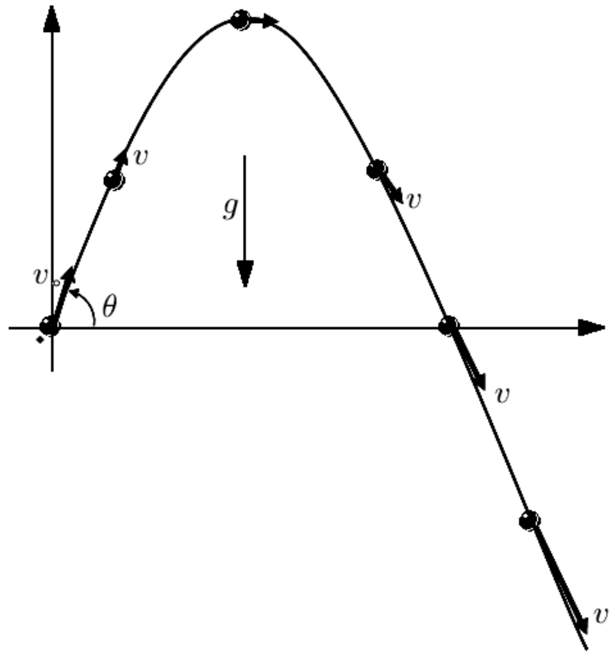
$$\begin{aligned} y &= \int v dt + C \\ &= \int v_T(۱ - e^{-\frac{k}{m}t}) dt + C \\ &= v_T(t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t}) + C \qquad ; \qquad y(\circ) = h \\ &= v_T t - \frac{m^۲}{k^۲} g(۱ - e^{-\frac{k}{m}t}) + h \end{aligned}$$

شکل ١٦.١١ پرش از هواپیما *Skydive* نمونه‌ای از رسیدن چترباز به سرعت حد

۲.۲.۱۱ حرکت پرتابه

مختصری از معادلات پارامتری حرکت یک پرتابه را در مثال۳۵.۹ بررسی کردیم و اکنون به جزئیات بیشتری می پردازیم. گیریم جسمی در امتداد افق با زاویهٔ θ و با سرعت اولیهٔ $v_\circ \frac{m}{s}$ پرتاب شده است. این جسم همزمان دو نوع حرکت افقی (یکنواخت با سرعت ثابت) و قائم (یا سقوط آزاد) دارد. نتیجه دو حرکت (صرفنظر از مقاومت هوا) شکلی سهمی است و معادلات حرکت متناظر چنین اند:

$$v_x = v_\circ \cos\theta \quad , \quad v_y = v_\circ \sin\theta - gt$$



شکل ۱۷.۱۱ حرکت یک پرتابه که در شکل سهمی ظاهر می شود

و $\tan\phi = \frac{v_y}{v_x}$ جهت بردار سرعت را در هر لحظه نشان می دهد. سپس با انتگرالگیری از معادلات حرکت می نویسیم:

$$x = \int_\circ^t v_\circ \cos\theta dt = v_\circ \cos\theta\ t \quad , \quad y = \int_\circ^t v_y dy = v_\circ \sin\theta\ t - \frac{۱}{۲} g t^۲$$

با حذف پارامتر t بین دو معادلهٔ بالا، معادلهٔ زیر حاصل می شود:

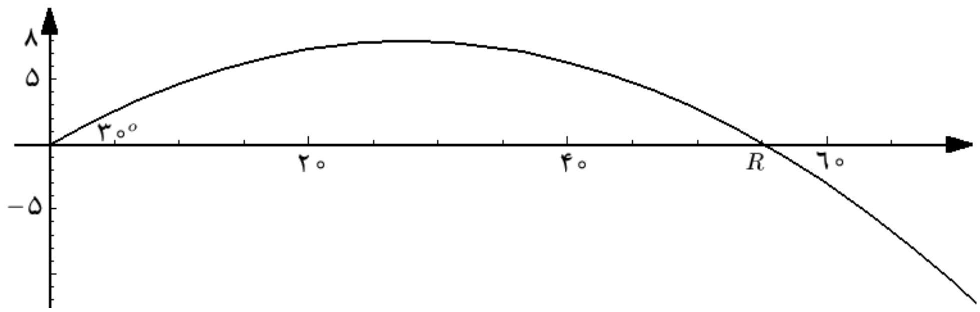
$$y = \tan\theta\ x - \frac{g}{۲ v_\circ^۲ \cos^۲\theta} x^۲$$

این معادلهٔ یک سهمی با رأس $H\left(\frac{v_\circ^۲ \sin ۲\theta}{۲g}, \frac{v_\circ^۲ \sin^۲\theta}{۲g}\right)$ است، این نقطه اوج پرتابه محسوب می شود و مدت زمان این اوج برابر $t_h = \frac{v_\circ \sin\theta}{g}$ ثانیه است. مدت زمانی که طول می کشد تا پرتابه به زمین برسد دو برابر زمان اوج و برابر $t_R = ۲t_h$ است و برد پرتابه نیز جائی است که پرتابه به زمین می رسد که در مسافت $R = \frac{v_\circ^۲ \sin ۲\theta}{g}$ متر از شروع حرکت واقعست. بیشترین برد وقتی است که $\sin ۲\theta = ۱$ باشد یعنی زاویهٔ پرتاب $\theta = \frac{\pi}{۴}$ بیشترین مقدار برد را میسر می‌سازد.

مثال ۱۰.۱۱ بازیکنی توپی را با سرعت $۲۵\frac{m}{s}$ با زاویهٔ ۳۰^o شوت می کند پس از چه زمانی و طی چه مسافتی توپ به زمین می رسد؟

حل. زمان سیر توپ و برد آن برابر است با

$$t_R = ۲t_h = ۲\frac{v_۰ \sin\theta}{g} = ۲\frac{۲۵ \times \frac{۱}{۲}}{۱۰} = ۲/۵s$$
$$R = \frac{v_۰^۲ \sin ۲\theta}{g} = \frac{۶۲۵\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱۰} \approx ۵۴/۱۳m$$



شکل ۱۸.۱۱ پرتابه مثال ۱۰.۱۱

مثال ۱۱.۱۱ لولهٔ یک فواره آب تحت چه زاویه‌ای نسبت به افق باید تنظیم گردد تا برد و ارتفاع اوج جهش آب یکی باشد؟

حل. برد $R = H \Rightarrow \frac{v_۰^۲ \sin ۲\theta}{g} = \frac{v_۰^۲ \sin^۲\theta}{۲g} \Rightarrow \tan\theta = ۴ \Rightarrow \theta \approx ۷۶^o$.

۳.۲.۱۱ پرتاب ماهواره

یک ماهواره را بایستی با چه سرعتی در راستای قائم پرتاب نمود تا از جو زمین خارج گردد؟

قانون گرانش عمومی نیوتن بیان می کند که بین جرم ماهواره m و جرم زمین M نیروی F رابطهٔ زیر برقرار است:

$$F = \mathbf{G}\frac{mM}{r^۲}$$

که $\mathbf{G}$ ثابت عمومی گرانش بوده و r فاصله ماهواره تا مرکز زمین است. چون ماهواره از جاذبه با شتاب a فرار می کند پس

$$ma = -\mathbf{G}\frac{mM}{r^۲}$$

و از مقاومت هوا صرفنظر می کنیم. بازای $a = r''$ این معادله بشکل $r'' = -\mathbf{G}\frac{M}{r^۲}$ بوده که مستقل از t است، از مشتق ترکیب توابع می توان نوشت

$$r'' = \frac{d^۲r}{dt^۲} = \frac{d}{dt}(\frac{dr}{dt}) = \frac{d}{dr}(\frac{dr}{dt}) \times \frac{dr}{dt} = v'v = \frac{dv}{dr}v$$

که متغیر مستقل در اینجا r است. پس می توان تغییر متغیر سرعت را بشکل زیر اعمال کرد

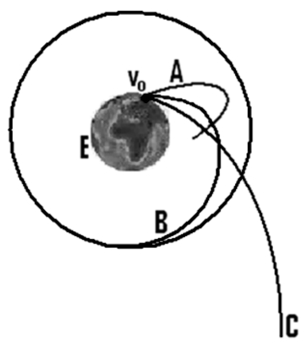
$$\frac{dv}{dr}v = -\mathbf{G}\frac{M}{r^۲}$$

این نتیجه می دهد

$$\int v\ dv = \int -\mathbf{G}\frac{M}{r^۲}\ dr$$

و بالاخره $\frac{۱}{۲}v^۲ = \mathbf{G}\frac{M}{r} + C$ چون با سرعت اولیه مفروض v_e می بایست به ماهواره سرعت دهیم پس شرط اولیه $v(R) = v_e$ خواهد بود که R شعاع زمین است و مقدار ثابت برابر است با $C = \frac{۱}{۲}v_e^۲ - \mathbf{G}\frac{M}{R}$ که با جایگذاری می نویسیم:

$$\frac{۱}{۲}v^۲ = \mathbf{G}\frac{M}{r} + \frac{۱}{۲}v_e^۲ - \mathbf{G}\frac{M}{R}$$



شکل ۱۹.۱۱ پرتاب اجسام بطرف بالا و خروجشان از جو بستگی به سرعت اولیه دارد.

شرط آنکه ماهواره نایستد اینستکه $v \geq ۰$. برای آنکه به حرکت خود ادامه دهد لازم است همواره از زمین فاصله بگیرد یعنی $r \to \infty$ پس $\lim_{r\to\infty} \mathbf{G}\frac{M}{r} \to ۰$ و نامعادلهٔ

$$\frac{۱}{۲}v_e^۲ - \mathbf{G}\frac{M}{R} \geq ۰$$

بدست می آید و بدین ترتیب $\frac{۱}{۲}v_e^۲ \geq \mathbf{G}\frac{M}{R}$ است که حداقل سرعت را نتیجه می دهد:

$$v_e \geq \sqrt{۲\mathbf{G}\frac{M}{R}}$$

از طرفی برای هر جسم واقع بر سطح زمین $mg = \mathbf{G}\frac{mM}{R^۲}$ یا $g = \mathbf{G}\frac{M}{R^۲}$ و عبارت فوق چنین ساده می شود

$$v_e = \sqrt{۲Rg}$$

این مقدار v_e را **سرعت فرار یا سرعت گریز ماهواره** (و یا هر هر جرم دلخواه) از جاذبه گوئیم که به جرم جسم بستگی ندارد و تنها وابسته به شعاع سیاره است. برای مثال برای فرار جسمی از سطح زمین (با شعاع $R = ۶۴۰۰ km$) لازم است سرعت جسم حداقل

$$v_e = \sqrt{۲ \times ۶۴۰۰ \times ۹/۸} = ۱۱/۲ \frac{km}{s}$$

باشد و برای سیارات مختلف، این مقدار متفاوت خواهد بود.

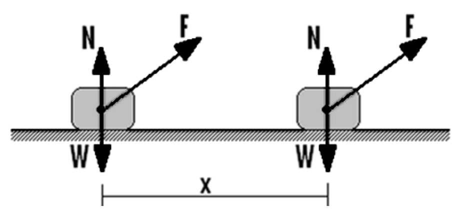
۴.۲.۱۱ کار و انرژی

کار و انرژی از مفاهیم بسیار مهم و اساسی فیزیک بوده و در تعریف، انرژی به معنی توانایی انجام دادن کار تعریف شده است. اگر جسمی بتواند کار انجام دهد، دارای انرژی است[5]. اگر نیروی F بتواند جسمی را بمقدار x جابجا کند، اندازهٔ کاری که انجام داده برابرست با

$$W(j) = F(N) \cdot x(m)$$

و کار کمیتی عددی بر حسب ژول j خواهد بود. اما ممکن است جابجائی بصورت مستقیم‌الخط انجام نگیرد در اینصورت کار حاصل از جابجائی را بصورت «مقدار نیروی جابجا شده» تعریف می کنیم. مثلاً وقتی جسمی را از ارتفاعی رها می کنیم نیروی وزن آن جابجا می شود، بنابراین زمین (که نیروی وزن را به جسم اعمال کرده) روی آن کار انجام داده است.

روی سطح افق جسمی با جرم m را در نظر بگیرید که در لحظهٔ t دارای موضع $x(t)$ است. فرض کنید این جسم را با نیروی $F(x)$ بطور پیوسته حرکت داده و جسم روی سطح از $x_۱$ به $x_۲$ جابجا شده و سرعتش از $v_۱$ به $v_۲$ می رسد. کار حاصل از این جابجائی چیست؟



شکل ۲۰.۱۱ جابجائی یک جسم توسط نیرو و انجام کار

مطابق شکل۲۰.۱۱ نیروی $F(x)$ که تابعی از موضع جسم است، بطور پیوسته جسم را حرکت داده و سرعت جسم از $v_۱$ به $v_۲$ می رسد. چون کار مقدار نیروی جابجا شده است پس

$$W = \int_{x_۱}^{x_۲} F(x)dx$$

[5]– طبق تعریف، کار برابرست با حاصلضرب داخلی بردار نیرو در بردار جابجایی (در بخش ؟؟به آن خواهیم پرداخت).

در اثر نیروی $F(x)$ جسم دارای سرعت $v(t)$ خواهد بود، طبق قانون دوم نیوتن

$$m\frac{dv}{dt}=F(x)$$

از طرفی $\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$ پس

$$mv\frac{dv}{dx}=F(x)$$

با انجام این تغییر متغیر از x به v داریم:

$$W=\int_{x_۱}^{x_۲}F(x)dx=\int_{x_۱}^{x_۲}mv\frac{dv}{dx}dx=\int_{v_۱}^{v_۲}mvdv=\frac{۱}{۲}mv^۲\Big|_{v_۱}^{v_۲}=\frac{۱}{۲}mv_۲{}^۲-\frac{۱}{۲}mv_۱{}^۲$$

مقدار $\frac{۱}{۲}mv^۲$ را با نام **انرژی جنبشی** می شناسیم و آنرا با E_c نشان می دهیم. این نتیجه نشان می دهد که کار، تغییر انرژی جنبشی جسم است.

در حالتی که نیروی F مقداری ثابت است مقدار کار برابرست با

$$W=\int_{x_۱}^{x_۲}F(x)dx=F(x_۲-x_۱)=F.\Delta x$$

که همان بیان اولیهٔ کار است.

حال فرض کنید که جسمی از ارتفاع h سقوط آزاد نموده و با سرعت v بر روی زمین می‌افتد. از آنجاکه نیروی وزن جسم جابجا می شود، بنابراین زمین روی آن کاری برابر

$$W=F.\Delta x=mgh$$

انجام داده است. این مقدار کار صرف تغییر سرعت جسم از $v_۰=۰$ به v شده و تغییرات انرژی جنبشی را بدنبال خواهد داشت، پس

$$\frac{۱}{۲}mv^۲-\frac{۱}{۲}mv_۰{}^۲=mgh$$

و بدین ترتیب $v^۲=۲gh$ شده و جسم با سرعت $v=\sqrt{۲gh}$ بر زمین می افتد.

اگر نیروی $F(x)$ تابعی پیوسته روی $[x_۱,x_۲]$ بوده و $-V(x)$ تابع اولیهٔ آن باشد، مقدار انتگرال $W=\int_{x_۱}^{x_۲}F(x)dx$ از پیوستگی تابع وجود داشته و حاصل انتگرال برابرست با

$$\int_{x_۱}^{x_۲}F(x)dx=-V(x)\Big|_{x_۱}^{x_۲}=V(x_۱)-V(x_۲)$$

تابع $V(x)$ را **تابع انرژی پتانسیل جسم** نامیم. با استفاده از تغییرات انرژی جنبشی می توان نوشت:

$$\frac{۱}{۲}mv_۲{}^۲-\frac{۱}{۲}mv_۱{}^۲=V(x_۱)-V(x_۲)$$

یا

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2 + V(x_2) = \frac{1}{2}mv_1{}^2 + V(x_1)$$

یعنی طی جابجائی جسم از مکان x_1 به x_2 مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل جسم همواره ثابت باقی می ماند و آنرا **قانون بقای انرژی** نامیم. این مقدار ثابت را **انرژی مکانیکی جسم** نامیده و با E نشان می دهیم. مقدار

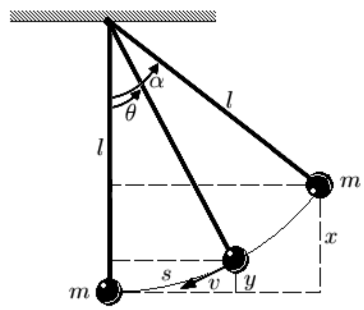
$$E = E_c + V(x)$$

در فیزیک نظری و مکانیک کوانتوم اهمیت خاصی دارد.

در فیزیک کلاسیک دو قانون، **قانون بقای جرم** و قانون بقای انرژی شناخته شده و مورد قبول بود. طبق قانون بقای جرم، ماده نه به وجود می آید و نه از بین می رود، حتی طی یک فرآیند شیمیایی، مجموعۀ جرم مواد شرکت کننده در آن فرآیند همواره ثابت است. در سال ۱۸۴۷م. فون هلمهولتز[6] قانون بقای انرژی را اعلام داشت. بر طبق این قانون، انرژی را می توان از صورتی به صورت دیگر تبدیل کرد، اما نمی توان آنرا نابود یا خلق کرد.

۵.۲.۱۱ حرکت آونگ

آونگی را در نظر بگیرید که جرم m را به انتهای آن آویزان نموده و به انتهای میله ای به طول l با جرم ناچیز بسته شده است. آونگ را به اندازۀ α از وضع تعادلش منحرف و رها کردیم و مایلیم تا حرکت آونگ را تشریح کنیم.



شکل ۲۱.۱۱ حرکت نوسانی آونگ ساده

مطابق شکل ۲۱.۱۱ اگر α زاویۀ شروع حرکت بوده و بعد از زمان t آونگ به وضعیت θ برسد، طبق اصل بقای انرژی $\frac{1}{2}mv^2 = mgl\cos\theta - mgl\cos\alpha$ و یا $v^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\alpha)$ و

[6] $Hermann\ Ludwig\ Ferdinand\ von\ Helmholtz(1821 - 1894)$

چون $s = l\theta$ باید نوشت $v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}$ که نتیجه می دهد:

$$\frac{۱}{۲}l^۲(\frac{d\theta}{dt})^۲ = gl(\cos\theta - \cos\alpha) \qquad (\ddagger)$$

با حل معادله نسبت به t می نویسیم

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{۲g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

گیریم که T یک دوره تناوب کامل آونگ باشد پس $T = \int_۰^T dt$ و

$$\frac{T}{۴} = -\sqrt{\frac{l}{۲g}}\int_\alpha^۰ \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

یا

$$T = ۴\sqrt{\frac{l}{g}}\int_۰^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{۲(\cos\theta - \cos\alpha)}}$$

مقدار T وابسته به α است و از آنجا که $۲(\cos\theta - \cos\alpha) = \sin^۲\frac{\alpha}{۲} - \sin^۲\frac{\theta}{۲}$ با فرض اینکه $\sin\frac{\theta}{۲} = \sin\frac{\alpha}{۲}\sin\phi$ و دیفرانسیل آن $\frac{۱}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}d\theta = \sin\frac{\alpha}{۲}\cos\phi d\phi$ و با ساده کردن عبارت بالا داریم:

$$d\theta = \frac{۲k\cos\phi d\phi}{\cos\frac{\theta}{۲}} = ۲\frac{\sqrt{k^۲ - \sin^۲\frac{\theta}{۲}}}{\sqrt{۱ - k^۲\sin^۲\phi}}d\phi$$

با فرض $k = \sin\frac{\alpha}{۲}$ می توان نوشت

$$T = ۴\sqrt{\frac{l}{g}}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\phi}{\sqrt{۱ - k^۲\sin^۲\phi}} = ۴\sqrt{\frac{l}{g}}F(k, \frac{\pi}{۲}) \qquad (**)$$

و در آن

$$F(k,\phi) = \int_۰^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{۱ - k^۲\sin^۲\phi}}$$

تابعی از k و ϕ است و **انتگرال بیضوی نوع اول** نام دارد[۷]. با مشتقگیری از $(\ddagger)$ داریم

$$\frac{۱}{۲}l^۲(۲)(\frac{d\theta}{dt})(\frac{d^۲\theta}{dt^۲}) = gl(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

۷– **انتگرال بیضوی نوع دوم** نیز عبارتست از

$$E(k,\phi) = \int_۰^\phi \sqrt{۱ - k^۲\sin^۲\phi}\, d\phi$$

و این دو نوع از انتگرال ها با توابع مقدماتی قابل حل نیستند و دارای حل تقریبی اند.

یا $l(\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}}) = -g\sin\theta$ برای θ–ی بقدر کافی کوچک $\sin\theta \approx \theta$ پس $\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}} + \frac{g}{l}\theta = ۰$ که جوابی به شکل

$$\theta = C_{۱}\sin kt + C_{۲}\cos kt$$

دارد و $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$. با شروط اولیهٔ $\theta(۰) = \alpha$ و $\frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=۰} = ۰$ سپس $C_{۱} = ۰$ و $C_{۲} = \alpha$ و بدینترتیب $\theta = \alpha\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$ و دوره تناوب آن عبارتست از $\sqrt{\frac{g}{l}}T = ۲\pi$ سپس $T = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.
برای θ–ی کوچک که $k\sin\theta \approx ۰$ نیز معادلهٔ $(**)$ همین نتیجه را می دهد.

تمرین ۴.۱۱ .

۱) دو جسم به جرم های ۸۰۰ گرم و ۵۰۰ گرم را از ارتفاع ۲۰ متری رها می کنیم. اگر نیروی مقاومت هوا بر سرعت این دو جسم با ضریب بترتیب ۰/۲ و ۰/۲۵ بر حرکتشان غلبه کند، این دو جسم با چه اختلاف زمانی به زمین خواهند رسید (راهنمائی: از تقریب $e^{\varepsilon} \approx ۱ + \varepsilon + \frac{۱}{۲}\varepsilon^{۲}$ استفاده کنید).

۲) زمان لازم برای رسیدن جسم به سرعت حد چقدر است؟ آیا می توانید مقداری تقریبی برای آن تعیین کنید؟

۳) راننده‌ای که با سرعت ۸۰ کیلومتر بر ساعت در طول جاده می راند، ناگهان ترمز می کند. اگر نیروی ترمز با نیروئی مساوی چهار برابر وزن کامیون از حرکت کامیون جلوگیری کند چقدر طول می کشد تا کامیون متوقف شود؟ کامیون از لحظهٔ ترمز تا توقف کامل چه مسافتی را خواهد پیمود.

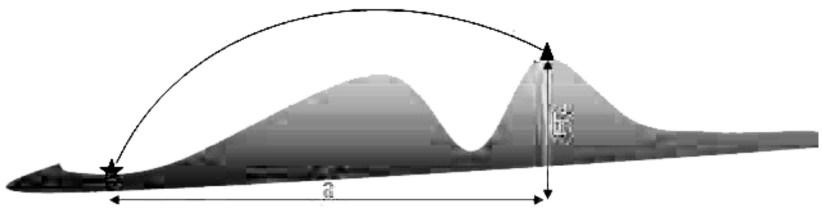
۴) فرض کنید گلوله‌ای با سرعت اولیهٔ $v_{۰}$ در محیطی پرتاب می شود که با نیروئی متناسب با مربع سرعت از حرکت آن ممانعت می کند. حرکت گلوله را مشخص نموده و ثابت کنید سرعت v گلوله با تغییر مکان x آن، بطور نمائی نزول می کند یعنی $v = v_{۰}e^{-\alpha x}$ که $\alpha > ۰$ ثابتی مثبت است.

۵) گلوله‌ای با سرعت $۶۰۰\frac{ft}{s}$ یک تخته به ضخامت ۶ اینچ را سوراخ کرده و با سرعت $۲۰۰\frac{ft}{s}$ از آن خارج می شود. فرض کنید تخته با نیروئی متناسب با مکعب سرعت گلوله از حرکت آن ممانعت کند. چه مدت طول می کشد تا گلوله از تخته عبور کند.

۶) جسمی بجرم m تحت تاثیر گرانش از ارتفاع h سقوط آزاد دارد و مقاومت هوا متناسب با مربع سرعت بر حرکتش غلبه می کند. نشان دهید سرعت جسم در هر لحظه، دارای فرمول $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right)$ است که k ثابتی وابسته با h بوده و نیز ثابت کنید $\lim_{t\to\infty} v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$.

۷) گلوله‌ای با سرعت اولیهٔ $۲۰۰\frac{m}{s}$ تحت زاویهٔ ۳۰^o نسبت به افق، از دهانهٔ توپ دوربردی واقع در یک دشت شلیک می شود. گلوله چه مدت در هوا خواهد بود و در چه فاصله‌ای از محل پرتاب به زمین خواهد رسید؟

۸) از سنگر خمپاره اندازی واقع در پائین یک تپه (شکل ۲۲.۱۱ زیر) آتش گشوده می شود. اگر شیب تپه زاویه α با افق ساخته و سرعت اولیهٔ گلوله $v_\circ$ باشد، تحت چه زاویه ای گلوله می بایست شلیک شود تا به هدف بخورد؟



شکل ۲۲.۱۱ گلوله از محل ستاره شلیک می شود

مفروضات مسئله را با $a = ۱۵۰$، $b = ۳۰$، $\alpha = ۳۰^o$ و $v_\circ = ۸۰\frac{m}{s}$ جایگزین نموده و جواب را بیابید.

۹) پرتابه‌ای با سرعت اولیهٔ $v_\circ$ تحت زاویهٔ θ نسبت به افق پرتاب می شود. اگر نیروی مقاومت هوا در برابر حرکت پرتابه برابر $F_x = -۲v_x^۲$ (بصورت افقی) مقاومت کند معادلات حرکت پرتابه و معادلهٔ مسیر آنرا بنویسید.

۱۰) با این فرض که ماه شعاعی تقریباً $\frac{۳}{۱۱}$ و جرمی تقریباً $\frac{۱}{۸۱}$ زمین دارد، سرعت گریز از ماه را تخمین بزنید.

۱۱) موشک حامل ماهواره‌ای بطور قائم به فضا پرتاب شده و سرعت آن پس از t ثانیه عبارتست از $v(t) = ۲۰t + ۵۰\frac{m}{s}$ ارتفاع موشک را در ۱۰۰ ثانیه اول بیابید.

۱۲) جسمی با نیروی $F(x) = ۲x^۲ + ۴x - ۱$ نیوتن روی محور طول ها از مبداء تا نقطهٔ $x = ۴$ متر جابجا می شود، تغییرات انرژی مکانیکی جسم چه مقدار بوده است.

۱۳) جسمی به جرم m را از سطح زمین با سرعت اولیهٔ $v_\circ$ در راستای قائم به خارج جو پرتاب می کنیم تا از جو خارج و از دید پنهان شود. چه مقدار کار انجام گرفته است؟

۱۴) جسمی به جرم m روی سطحی افقی با نیروی ثابت F تحت زاویهٔ θ کشیده می شود. اگر μ ضریب اصطکاک سطح باشد، نشان دهید $F = \frac{\mu mg}{\mu\sin\theta + \cos\theta}$ و فرمول شتاب حرکت جسم را بنویسید. اگر این نیرو از لحظهٔ شروع حرکت تا فاصلهٔ d اعمال شود، چقدر کار روی جسم انجام داده است. اگر در فاصلهٔ d از شروع حرکت، نیروی F قطع شود، جسم پس از طی چه مسافتی و چه زمانی خواهد ایستاد.

۳.۱۱ مدار الکتریکی

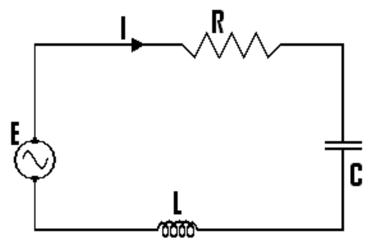
اجزای یک مدار الکتریکی برای یک مدار RLC شامل یک باتری، مقاومت الکتریکی، خودالقاء و خازن که بطور سری بسته شده اند، به شرح زیر است:

• نیروی محرکه[۸] الکتریکی $\mathcal{E}(t)$ (بر حسب ولت V) که باطری یا ژنراتور بوده و بر حسب زمان می تواند ثابت (باتری) یا متغیر (ژنراتور) باشد.

• مقاومت[۹] الکتریکی $\mathcal{R}$ (بر حسب اهم Ω) که مقابل عبور جریان می ایستد و بر حسب زمان ثابت می باشد و طبق قانون اهم مقدار نیروی محرکه را به اندازهٔ $\mathcal{E}_R = RI$ کاهش می‌دهد.

• سلف یا خودالقاء[۱۰] $\mathcal{L}$ (برحسب هانری H) که یک سیم پیچ است و با عبور جریان الکتریکی در آن القاء مغناطیسی پدید می آید و تمایل به حفظ جریان دارد. این القاء، خود در مقابل جریان باندازهٔ $\mathcal{E}_L = L\dfrac{dI}{dt}$ مقاومت نموده و این مخالفت بستگی به مقدار عبور جریان خواهد داشت.

• خازن[۱۱] $\mathcal{C}$ (بر حسب فاراد F) که دو صفحه موازی برای ذخیره بارهای الکتریکی است. بار الکتریکی Q که همان الکترونها هستند با جمع شدن بر روی صفحات خازن، خود در مقابل جریان به اندازهٔ $\mathcal{E}_C = \dfrac{1}{C}Q$ مقاومت می کند. مقدار عبور بار الکتریکی همان جریان الکتریکی است و لذا بر حسب زمان متغیر بوده و برابر $\mathcal{I} = \dfrac{dQ}{dt}$ (بر حسب کولن C) می باشد.



شکل ۲۳.۱۱ مدار الکتریکی شامل مقاومت و سلف و خازن

مقدار جریان الکتریکی توسط هر سه عنصر مقاومت، سلف و خازن تغییر می کند که پس از اندک زمانی در مدار تثبیت خواهد شد و این مقدار در هر لحظه مطابق قانون کرشهف[۱۲] است که بیان می کند «**جمع جبری نیروهای محرکه اجزای یک مدار بسته همواره صفر است**» لذا

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_R - \mathcal{E}_L - \mathcal{E}_C = 0$$

[۸] $Emf - Electromotive\ Force$
[۹] $Resistor$
[۱۰] $Inductor$
[۱۱] $Capacitor$
[۱۲] $Kirchhoff\ Law$

که با جایگذاری و ساده نمودن معادلهٔ جریان مدار بصورت زیر خواهد بود:

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{۱}{C}Q = \mathcal{E}(t)$$

از فرمول مقدار متوسط یک تابع (مطلب ۵.۱۰) بشکل $f_{av} = \frac{۱}{b-a}\int_a^b f dt$ می توان جریان متوسط را در یک مدار محاسبه نمود. همچنین مقدار موثر یک تابع را چنین تعریف می کنیم.

$$f_{eff} = \sqrt{\frac{۱}{b-a}\int_a^b f^۲ dt}$$

جریان موثر مدار I_{eff} را گاهی با I_{RMS} نیز نشان داده و در یک مدار با جریان سینوسی همواره رابطهٔ $I_{RMS} = \frac{I_{max}}{\sqrt{۲}}$ برقرار است.

مثال ۱۲.۱۱ مقدار متوسط و موثر تابع جریان $I(t) = ۱۰۰ \sin \pi t$ را در بازهٔ $[۰, ۱]$ بیابید.

حل. با استفاده از فرمول مقدار متوسط و موثر جریان می نویسیم:

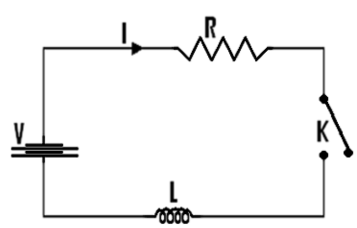
$$\begin{aligned} I_{av} &= \frac{۱}{۱-۰}\int_۰^۱ ۱۰۰ \sin \pi t dt = -\frac{۱۰۰}{\pi}\cos \pi t\Big|_۰^۱ = \frac{۲۰۰}{\pi} \approx ۶۳/۶۶ \ A \\ I_{eff} &= \sqrt{\frac{۱۰۰۰۰}{۱-۰}\int_۰^۱ \sin^۲ \pi t dt} = \sqrt{۵۰۰۰\left(t - \frac{\sin ۲\pi t}{۲\pi}\right)\Big|_۰^۱} \approx ۷۰/۷۱ \ A \end{aligned}$$

از تابع جریان مشخص است که $I_{max} = ۱۰۰$ و بنابراین

$$I_{RMS} = \frac{I_{max}}{\sqrt{۲}} = \frac{۱۰۰}{۱/۴۱۴۱} \approx ۷۰/۷۱ \ A$$

۱.۳.۱۱ مدار RL

مداری شامل یک منبع تغذیه با ولتاژ ثابت و یک مقاومت الکتریکی و یک سلف که بطور سری قرار گرفته اند را در نظر بگیرید. از لحظه‌ای که کلید را می زنیم می خواهیم شدت جریان حاصله را بر حسب زمان بیابید.



شکل ۲۴.۱۱ مدار RL

گیریم مدار دارای منبع تغذیهٔ ثابت V و مقاومت الکتریکی R و سلف خودالقاء L مطابق شکل بوده که با زدن کلید K، جریان در مدار برقرار می گردد (شکل۲۴.۱۱). اگر $I(t)$ تابع جریان بر حسب زمان t باشد، بنابر جمع اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت و سلف داریم:

$$RI + L\frac{dI}{dt} = V$$

که معادلهٔ مرتبه اول زیر را نتیجه می دهد:

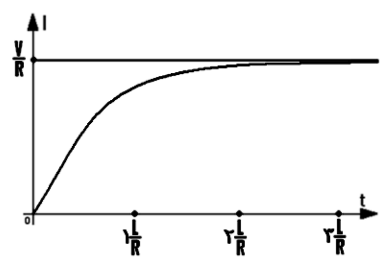
$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L}$$

با یافتن عامل انتگرالساز $e^{\int \frac{R}{L}dt} = e^{\frac{R}{L}t}$ و سپس جواب عمومی $Ie^{\frac{R}{L}t} = \int e^{\frac{R}{L}t}\frac{V}{L}dt + C$ نتیجه می گیریم:

$$I = \frac{V}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

در لحظهٔ وصل کلید، جریان مدار صفر است لذا $I(۰) = ۰$ و ثابت انتگرالگیری $C = -\frac{V}{R}$ بوده و لذا جواب خصوصی عبارتست از

$$I = \frac{V}{R}(۱ - e^{-\frac{R}{L}t})$$



شکل ۲۵.۱۱ منحنی جریان در مدار جریان مستقیم RL

در حالت خاص با حذف سلف از مدار، تابع فوق به شکل $I = \frac{V}{R}$ درخواهد آمد که صحت قانون اهم را تایید می کند.

مثال ۱۳.۱۱ در مداری شامل منبع تغذیه $۲۴V$، یک مقاومت ۱۲Ω و سلف $۲mH$ بطور سری به منبع تغذیه متصلند. معادله کلی جریان و همچنین مقدار جریان را در لحظه $t = ۴\mu s$ بیابید.

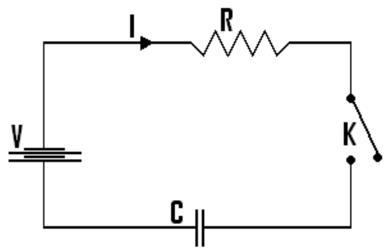
حل. تحت این شرایط و از فرمول حاصله داریم:

$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{R}(۱ - e^{-\frac{R}{L}t}) \\ I &= \frac{۲۴}{۱۲}(۱ - e^{-\frac{۱۲}{۲\times ۱۰^{-۳}}t}) \\ I &= ۲(۱ - e^{-۶۰۰۰t}) \end{aligned}$$

در ۴ میکروثانیه اول مقدار جریان به $I(\frac{۴}{۱۰^{۶}}) = ۲(۱ - e^{-۶۰۰۰\times\frac{۴}{۱۰^{۶}}}) = ۰/۰۴۷A$ می رسد.

۲.۳.۱۱ مدار RC

اکنون مدار را در حالتی که شامل یک منبع تغذیه با ولتاژ ثابت، یک مقاومت الکتریکی و یک خازن که بطور سری قرار گرفته اند را در نظر بگیرید (شکل۲۶.۱۱). از لحظه‌ای که کلید را وصل می کنیم شدت جریان حاصله را بر حسب زمان بیابید.

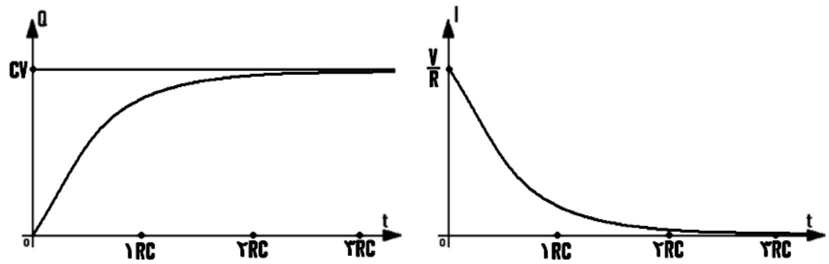


شکل ۲۶.۱۱ مدار RC

حل. گیریم مدار دارای منبع تغذیهٔ ثابت V و مقاومت الکتریکی R و خازن C مطابق شکل بوده که با زدن کلید K، جریان در مدار برقرار می گردد. اگر $I(t)$ تابع جریان بر حسب زمان t باشد، بنابر جمع جبری اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت و خازن چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_R + \mathcal{E}_C = \mathcal{E} \\ &RI + \frac{۱}{C}Q = V \\ &R\frac{dQ}{dt} + \frac{۱}{C}Q = V \\ &\frac{dQ}{dt} + \frac{۱}{RC}Q = \frac{V}{R} \\ &Qe^{\frac{۱}{RC}t} = \int \frac{V}{R}e^{\frac{۱}{RC}t} + K \qquad ; \quad Q(۰) = ۰ \\ &Q = CV(۱ - e^{-\frac{۱}{RC}t}) \\ &I = \frac{dQ}{dt} = \frac{V}{R}e^{-\frac{۱}{RC}t} \end{aligned}$$

مسلماً برای $t = RC$ مقدار بار الکتریکی با عامل ٦۳% $\sim (1 - e^{-1})$ به مقدار تعادل خود افزایش یافته و ظرف این مدت جریان کاهش می یابد زیرا صرف شارژ خازن خواهد شد. نمود این گفته ها را در اشکال زیر می توان دید.



شکل ۲۷.۱۱ نمودار جریان و بار در مدار RC

تمرین ۵.۱۱ .

۱) اگر در مدار RLی، $E = 1$ و $R = 20$ و $L = 5$ و $I(0) = 0$ معادلهٔ جریان چیست؟

۲) در مداری شامل منبع تغذیهٔ ثابت ۴ ولتی و مقاومت الکتریکی ۳ مگا اهمی و خازنی یک میکروفارادی که بطور سری وصل شده اند، با زدن کلید K، جریان در مدار برقرار می‌گردد. پس از یک ثانیه از اتصال کلید مقدار جریان حاصله در مدار را حساب کنید.

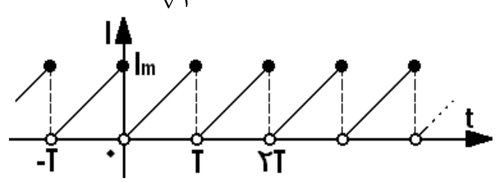
۳) سیم‌پیچی با خودالقائی ۵۰ هانری و مقاومت ۳۰ اهم را به یک باتری ۱۰۰ ولتی وصل می کنیم. چه زمانی طول می کشد که جریان به نصف حالت نهائی (تعادل) خود برسد.

۴) در مداری RL شامل مقاومتی ۵۰ اهمی و سلف ۲ هانری که بطور سری به منبع تغذیه ۱۰ ولتی وصلند اگر در ابتدای اتصال $I(0) = 1/2A$ باشد در زمان ۴ میلی ثانیه شدت جریان چقدر است؟

۵) مداری RL با $R = 100\Omega$ و $L = 50H$ را به منبعی متناوب $E = 2\sin 2t$ وصل نموده و در لحظه اتصال جریان مدار برابر $I(0) = 0/01A$ باشد معادلهٔ جریان چیست؟

٦) اگر معادلهٔ شدت جریان در مداری بصورت $I(t) = 220\sin(100\pi t + \frac{\pi}{4})$ باشد، شدت جریان متوسط و شدت جریان موثر مدار را در یک بازهٔ زمانی $[0, 1\ s]$ بیابید.

۷) در موج زیر I_m جریان ماکزیمم است. نشان دهید $I_{RMS} = \frac{I_m}{\sqrt{3}}$.



شکل ۲۸.۱۱ موج دندان اره‌ای جریان

۴.۱۱ مسائل دیگر

اکثر پدیده های طبیعی دارای رشد نمائی اند نظیر رشد طبیعی جمعیت که شامل جمعیت هر نوع جاندار نظیر باکتری ها و یا سلول های یک تومور سرطانی نیز خواهد بود. اگر در پدیدهٔ خاصی مانند رشد جمعیت، اندازهٔ جمعیت در زمان t برابر $P(t)$ بوده و آهنگ رشد آن $\frac{dP}{dt}$ تلقی شود، این رشد بمرور زمان متناسب با مقدار جمعیت $P(t)$ است. گیریم ثابت این نسبت k باشد، سپس

$$\frac{dP}{dt} = kP(t)$$

که آنرا **معادلهٔ رشد (زوال)** نامند. برای $k = ۰$ رشدی وجود ندارد، مقدار $k > ۰$ را **ثابت رشد** نامیده و مقدار $k < ۰$ را **ثابت زوال** گویند[۱۳]. بدیهی است که خود زوال را می توان رشد منفی تلقی نمود. در هر حال با حل معادلهٔ رشد(زوال)، از آن انتگرال گرفته و $\int \frac{dP}{P} = \int k\ dt$ نتیجه می دهد $P(t) = e^{kt+C} = e^C.e^{kt}$. مقدار ثابت $P(۰) = e^C$ جمعیت اولیه $P_۰$ در نظر گرفته شده و معادلهٔ رشد بشکل زیر حاصل می شود:

$$P(t) = P_۰ e^{kt}$$

مثال ۱۴.۱۱ در روند کِشت یک نوع باکتری، طی ۴ ساعت تعداد باکتری ها از ۲۰ هزار عدد به ۴۰۰ هزار تا رسیده است. طی ۲۴ ساعت آینده تعداد آنها چقدر خواهد بود؟

حل. جمعیت اولیه $P_۰ = ۲۰۰۰۰$ و $P(۴) = ۴۰۰۰۰۰$ است لذا

$$۴۰۰۰۰۰ = ۲۰۰۰۰e^{۴k}$$

پس $e^{۴k} = ۲۰$ و ثابت رشد برابر با $k = \frac{۳}{۴}$ است. معادلهٔ رشد این گونه باکتری بصورت $P(t) = ۲۰۰۰۰e^{\frac{۳}{۴}t}$ بوده و در ۲۴ ساعت دیگر جمعیت این گونه باکتری برابر

$$P(۲۴) = ۲۰۰۰۰e^{\frac{۳}{۴}\times ۲۴} = ۲۰۰۰۰e^{۱۸} = ۱,۳۱۳,۱۹۹,۳۸۲,۷۴۶$$

خواهد شد.

مثال ۱۵.۱۱ فرض کنید دمای یک جسم تحت شرایط آزمایشگاهی اید آل $T_۰$ است. **قانون تبرید نیوتن** بیان می کند که دمای جسم T به میزانی متناسب با تفاضل T و دمای اطرافش S تغییر کرده و جسم سرد می شود ($T_۰ > S$). اگر ثابت زوال این نسبت را k بگیریم پس

$$\frac{dT}{dt} = k(T - S)$$

جواب این معادله عبارتست از $T = S + (T_۰ - S)e^{kt}$ که $k < ۰$ و جسم تا زمانی سرد خواهد شد که دمایش با دمای محیط یکی شود.

[۱۳] که می توان معادلهٔ رشد را معادلهٔ زوال نامید.

۱.۴.۱۱ رادیواکتیو

می دانیم که از بین حدوداً ۱۲۰ عنصر شناخته شده در طبیعت، هستهٔ برخی عناصر سنگین پرتوهائی را از خود ساطع می کنند. به این گونه عناصر سنگین، عناصر **رادیواکتیو** گفته و به تابش پرتوی آنها **تابش هسته‌ای** گوئیم. تابش های هسته‌ای بطور کلی به سه دستهٔ پرتوهای آلفا، بتا و گاما تقسیم می گردند. هر مادهٔ رادیواکتیو پرتوهای مشخصی گسیل می کند. بطور مثال هستهٔ اتم های کربن و استرانسیوم رادیواکتیو، پرتو بتا گسیل می کنند، هستهٔ کبالت رادیواکتیو پرتو گاما و هسته های رادیوم و اورانیوم پرتو آلفا و گاما تشعشع می کنند.

مواد رادیواکتیو (چه طبیعی و چه مصنوعی) در تابش هسته‌ای خود تجزیه شده و طی گذشت زمان به عناصر سبکتر تبدیل می شوند. زمان لازم برای زوال نیمی از مادهٔ رادیواکتیویته را **نیمه عمر** آن ماده گویند و این زمان برای عناصر مختلف، متفاوت است. نیمه عمر سزیم۱۳۷ سی سال، کبالت٦۰ حدود ۵ و نیم سال و استرانسیوم۹۰ سی سال است. نیمه عمر ایزوتوپ معمولی اورانیوم^{۲۳۸}U، ۴/۵ میلیارد سال است و طی چند مرحله واپاشی به هلیوم و ایزوتوپی از سرب تبدیل می گردد.

از نیمه عمر مواد رادیواکتیو برای تاریخگذاری اشیاء قدیمی و کهن استفاده می شود. کاربردهای دیگر رادیواکتیویته شامل کمک به معاینه و تشخیص بیماریها از طریق تابش اشعه ایکس و درمان سرطان، ایجاد تغییرات ژنتیکی در بذر گیاهان، استریل کردن غذا، رادیوتراپی و ایجاد نیرو و انرژی که مهمترین کاربردهای این عناصر بشمار می روند. مضرترین کاربرد مواد رادیواکتیو در تولید سلاح های مخرب نظیر بمب هیدروژنی و بمب های نوترونی و هسته‌ای ظاهر می شود. در یک بمب هسته‌ای از مواد مختلفی استفاده می شود و موادی که نیمه عمر طولانی تری دارند، ماندگاری بیشتری در طبیعت داشته و لذا خطرآفرین ترند مثل استرونسیم ۹۰ که دارای نیمه عمری برابر ۳۰ سال است.

شناخت نیمه عمر مواد پرتوزا از پارامترهای اصلی شناخت این مواد است. تلاشی این عناصر طی زمان متفاوت بوده، برخی سریع متلاشی شده و برخی نیز بکندی تجزیه می شوند. برای یک مادهٔ رادیواکتیو با جرم $m_\circ$ و نیمه عمر T، پس از گذشت زمان t طی تلاشی مقدار $m(t)$ از آن باقی خواهد ماند. بدینترتیب چنانچه $m(t)$ جرم ماده در زمان t باشد

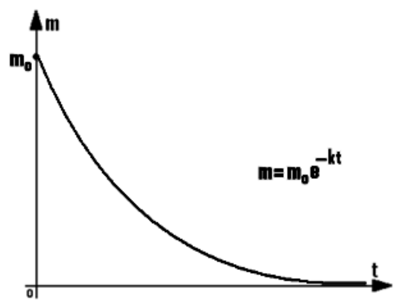
$$\frac{dm}{dt} = -km \quad , \quad k > \circ$$

و این یک معادلهٔ زوال است زیرا ماده ناپدید می شود. متغیرهای این معادله جداشده و با کمی محاسبه جواب آن برابر $m(t) = Ce^{-kt}$ بدست می آید. در لحظه آغاز تمام جرم موجود بوده یعنی $m(\circ) = m_\circ$ و معادله بصورت $m(t) = m_\circ e^{-kt}$ نتیجه خواهد شد. از اینکه پس از گذشت نیمه عمر T، مقدار ماده نصف می شود داریم $\frac{۱}{۲}m_\circ = m_\circ e^{-kT}$ سپس $k = \frac{\ln ۲}{T}$ و

مقدار نهائی ماده بجامانده از فرمول زیر تبعیت می کند:

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$$

که واحد زمان t تابع واحد زمانی T است.



شکل ۲۹.۱۱ روند واپاشی جرم رادیواکتیو

مثال ۱۶.۱۱ باقیماندهٔ یک کیلوگرم ماده رادیواکتیو سزیم ۱۳۷ با نیمه عمر ۹۰ سال پس از یک سال چقدر است؟

حل.

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t} = 1000(gr)e^{-\frac{\ln 2}{90}\times 1} = \mathbf{992}\ gr$$

مثال ۱۷.۱۱ اگر یک هفته طول بکشد تا ٦٠ درصد مواد رادیواکتیویته حاصل از انفجار یک بمب هسته ای از بین برود، چند روز طول می کشد تا ۹۹ درصد مواد ناپدید شوند.

حل. مثال دارای جزئیات زیادی است و فرض می گیریم که کل ماده اولیه از یک نوع و در لحظهٔ انفجار تمام جرم موجود باشد یعنی $m(0) = m_0$ بوده و $m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$. طبق فرض مسأله، ٦٠ درصد ماده طی هفت روز از بین می رود پس

$$\frac{40}{100}m_0 = m_0 e^{-7\frac{\ln 2}{T}}$$

که نتیجه می دهد $T = -7\frac{\ln 2}{\ln 0/4} = 5/3$. با جایگذاری $m(t) = m_0 e^{-0/13t}$ که t برحسب روز است. مدت زمانی که لازم است تا ۹۹ درصد ماده ناپدید شود عبارتست از

$$\frac{1}{100}m_0 = m_0 e^{-0/13t}$$

که $t = -\frac{\ln 0/01}{0/13} \sim 35/5$ روز بوده و لذا ۴ هفتهٔ بعد ۹۹ درصد ماده ناپدید خواهد شد.

تمرین ۶.۱۱ .

۱) فرض کنید دمای هوا 20^oC بوده و دمای جسم طی نیم ساعت از ۱۲۰ درجه به ۵۰ درجه رسیده باشد. چقدر طول می کشد تا دمای جسم به ۲۵ درجه برسد.

۲) دمای جسدی هنگام کشف آن 28^oC بوده و ۲۰ دقیقه بعد دمای آن به 22^oC می‌رسد. اگر دمای طبیعی بدن 37^oC باشد و دمای محیط ثابت و برابر 15^oC باشد، زمان مرگ را تعیین کنید.

۳) **(زیست)** اندازه جمعیت حشره ای توسط تابع رشد $P(t) = 300e^{\frac{1}{10}t}$ تعیین می شود که t تعداد روز است. ظرف چه زمانی تعداد حشره به ۱۵۰۰ عدد خواهد رسید؟

۴) **(زیست)** فرض کنید یک کولنی از کرم میوه دارای رشد نمائی بوده و اندازه کولنی طی ۸ روز دو برابر شده است. اگر با این آفت مبارزه نشود طی یک ماه اندازه کولنی چقدر خواهد شد؟

۵) **(زیست)** ٦ میلی گرم از داروئی به بیماری تزریق شده و مقدار این دارو در بدن وی پس از t دقیقه در معادلهٔ $P'(t) = -\frac{12}{100}P(t)$ صدق می کند. ۱۰ ساعت پس از تزریق میزان دارو در بدن وی به چه مقدار خواهد رسید؟

٦) **(زیست)** تعداد باکتریها در کشت آزمایشگاهی هر ساعت دو برابر می شود. چقدر زمان لازم است تا تعداد هزار باکتری به یک میلیون باکتری برسد؟

۷) **(زیست)** بیماری آنفلوآنزا در شهری شیوع پیدا کرده و $P(t)$ تعداد نفراتی است که پس از t روز مبتلا شده اند. اگر $P(0) = 50$ و آهنگ شیوع بیماری $100t - 3t^2$ در روز باشد، فرمولی برای $P(t)$ بیابید.

۸) **(فیزیک)** نیمه عمر ماده رادیوکتیو کربن ۱۴ برابر ۵۷۳۰ سال است. ثابت زوال آن چیست؟

۹) **(فیزیک)** ثابت زوال برای استرانسیوم ۹۰ برابر ۰/۰۲۴۴ است (نیمه عمر بر حسب سال می باشد). چقدر طول می کشد تا مقدار ۱۰۰ گرم استرانسیوم به نصف برسد؟

۱۰) **(فیزیک)** یک کیلوگرم ماده رادیواکتیو رادیوم با نیمه عمر ۱٦۹۰ سال در محفظه‌ای سربی جای داده شده است. مقدار متوسط رادیوم درون محفظه پس از صد سال دیگر چقدر خواهد بود.

۱۱) **(فیزیک)** نیمه عمر عنصر رادیواکتیو رادیوم ۲۴۰۰ سال بوده و مقدار متوسط رادیوم موجود در سطح زمین $\frac{1}{10^{12}}$ اتم است. آیا این فرض را که «این مقدار موجود رادیوم باقیمانده مقدار بیشتری رادیوم است» درست است یا خیر؟ عمر زمین ۴/٦ میلیارد سال است.

۱۲) **(فیزیک)** فرض کنید با واپاشی هر اتم از مادهٔ رادیواکتیو A به نیمه عمر T_A یک اتم از مادهٔ رادیواکتیو B با نیمه عمر T_B تولید شود. با این فرض که در آغاز M اتم از A و N اتم از B موجود باشد، چند اتم از هر کدام پس از زمان t موجود خواهد بود؟

۱۳) **(زیست)** برخی از مدلهای رشد جمعیت از **قانون رشد لجستیک** پیروی می کنند. در قانون رشد لجستیک فرض است که میزان رشد $P'(t)$ کمیت $P(t)$ در لحظهٔ t عبارتست از $P'(t) = \alpha P(t)[\beta - P(t)]$ که α و β اعدادی ثابتند. اگر $P(\circ) = P_\circ$ نشان دهید که

$$P(t) = \frac{\beta P_\circ}{P_\circ + (\beta - P_\circ)e^{-\alpha\beta t}}$$

منحنی مدل را رسم کنید.

۲.۴.۱۱ مسئله کوتاهترین مسیر

این مسأله که از مسائل قدیمی فیزیک به شمار می رود چنین مطرح می کند که اگر جسمی (گلوله ای) بخواهد مسیری بین نقاط A و B طی کند روی چه مسیری حرکت کند تا کمترین زمان سپری شود.

در نگاه اول شاید مسیر مستقیم بهترین انتخاب باشد. گالیله معتقد بود مسیر دایره ای بهترین مسیر و سریعترین زمان لازم را داراست. در ۱۶۹۶م. یوهان برنولی[۱۴] مسئله کلیتری مطرح کرد. این منحنی که به منحنی **کوتاهترین زمان**[۱۵] معروف است، چنین بیان می شود که پرتو نوری از نقطهٔ A در محیط رقیقی (مثلاً هوا) با سرعت v_a وارد محیط غلیظتری (مثلاً آب) شده و با سرعت v_w به نقطهٔ B می رسد (شکل۱۱.۳۰). زمان طی شده عبارتست از

$$T = t_۱ + t_۲ = \frac{AP}{v_a} + \frac{PB}{v_w}$$

که با استفاده از شکل، زمان لازم عبارتست از

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^۲ + x^۲}}{v_a} + \frac{\sqrt{b^۲ + (c-x)^۲}}{v_w}$$

کمترین زمان لازم شرط $T' = \circ$ با $T'' > \circ$ است. لذا

$$T'(x) = \frac{۱}{v_a}\frac{۲x}{۲\sqrt{a^۲ + x^۲}} + \frac{۱}{v_w}\frac{-۲(c-x)}{\sqrt{b^۲ + (c-x)^۲}} = \circ$$

---

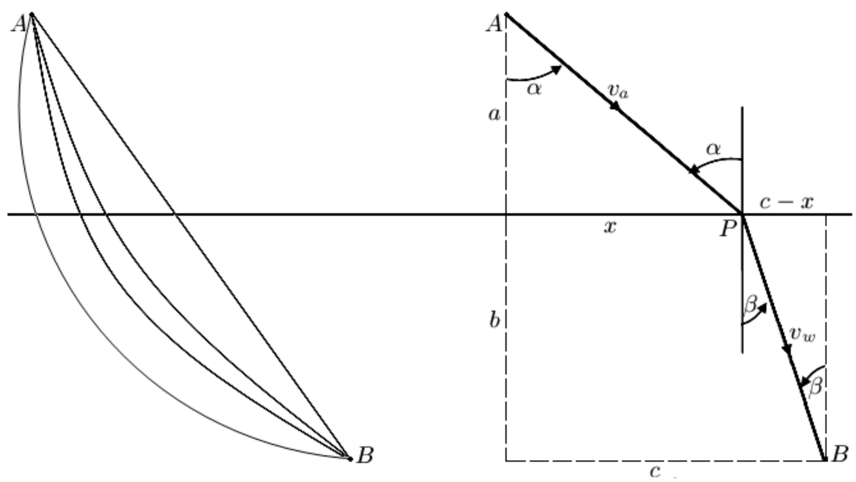
[۱۴] *Johann Bernoulli*

[۱۵] *Brachistochrone* به یونانی کوتاهترین *Brachistos* و زمان *Chronos*

و نتیجه می گیریم:

$$\frac{1}{v_a}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{v_w}\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

و قانون اسنل[۱۶] یا قانون شکست $\frac{\sin\beta}{v_w}=\frac{\sin\alpha}{v_a}$ را بدست می آوریم. بررسی شرط $T''>0$ براحتی قابل بررسی است. ایدهٔ این اثبات در ۱۶۵۷م. توسط فرما کشف شد و آن را اصل کمترین زمان[۱۷] نامید.



شکل ۳۰.۱۱ پیمایش کوتاهترین مسیر بین نقاط A تا B

واضح است که اگر دو محیط یکی باشند پس $\alpha=\beta$ و بهترین مسیر، مسیر مستقیم خواهد بود.

۳.۴.۱۱ انعکاس سهمی

فرض می کنیم شکل آینه ای بصورت منحنی دواری است. گیریم از نقطه ای روی محور دوران به نام F نوری به آینه تابیده و شعاعهای نور در جهتی موازی با محور منعکس شوند (شکل ۳۱.۱۱). نشان می دهیم شکل این منحنی می بایست سهمی باشد.

گیریم این منحنی از دوران منحنی $y=f(x)$ حول محور x−ها حاصل شده و نقطهٔ تابش F را مبداء مختصات در نظر می گیریم. هر شعاع نور از مبداء F بر نقطهٔ $M(x,y)$ از آینه تابیده و موازی محور x−ها منعکس شده و در راستای MA از آینه دور می شود. از آنجا که انعکاس

[۱۶] *Snell Law*

[۱۷] *Fermat's Principle of Least Time*

شعاع طبق قوانین فیزیک نسبت به خط مماس بر سطح سنجیده می شود، پس α و β بترتیب زوایای تابش و بازتاب بوده و طبق **قانون انعکاس** $\alpha = \beta$ است. از شکل براحتی می توان دید که $\theta = \alpha + \beta$ پس $\theta = ۲\alpha$ و بنابراین $\tan\theta = \tan ۲\alpha$ که از نسبت دو برابر کمان می نویسیم:

$$\tan\theta = \frac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^۲\alpha}$$

اما θ زاویه خط تابش و تانژانت آن برابر شیب $\frac{y}{x}$ است و α شیب خط مماس بر منحنی و بنابراین $\tan\alpha = y'$ می باشد که با جایگذاری معادله داریم:

$$\frac{y}{x} = \frac{۲y'}{۱ - (y')^۲}$$

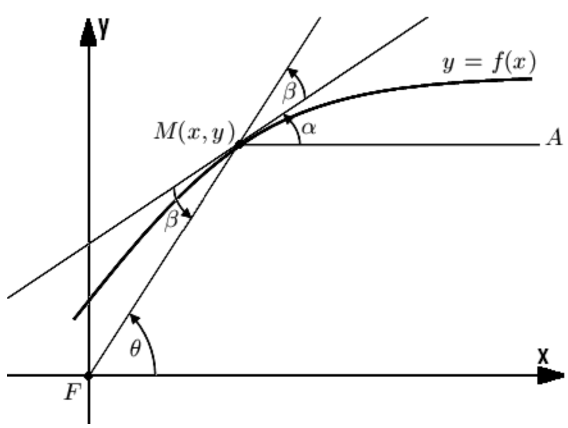
یا $y(y')^۲ + ۲xy' - y = ۰$ حاصل می شود. با حل این معادلهٔ درجه دو نسبت به y' (با روش دلتا) داریم $y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^۲ + y^۲}}{y}$ یا

$$ydy + xdx = \pm\sqrt{x^۲ + y^۲}dx$$

از فرض متغیر جانشین $x^۲ + y^۲ = u^۲$ و دیفرانسیل آن $xdx + ydy = udu$ و سپس جایگذاری در معادله دیفرانسیل داریم $udu = \pm udx$ یا $du = \pm dx$ با انتگرالگیری

$$\int du = \pm \int dx$$

می نویسیم $u = \pm x + C$ و بنابراین $x^۲ + y^۲ = (\pm x + C)^۲$. از ساده کردن این معادله به جواب عمومی $y^۲ = ۲Cx + C^۲$ می رسیم که تابع $f(x)$ مفروض بوده و معادلهٔ یک سهمی با کانونی در مبداء است.



شکل ۳۱.۱۱ پرتو خارج شده از مبدا F پس از انعکاس توسط آینه، موازی محور طولها حرکت می کند.

۱۱.۴.۴ اقتصاد

در اقتصاد دو نوع الگوی ایستا[18] و پویا[19] وجود دارد. الگوهای ایستا مربوط به وضعیت تعادل است که در یک زمان خاص سنجیده شده و الگوهای پویا حالاتی است که نسبت به زمان تغییر می کند. از طرفی در الگوها دو نوع متغیر وجود دارد متغیرهای درونزا[20] و متغیرهای برونزا[21] که از ابتدا معین فرض می شوند. این متغیرهای برونزا در خارج از الگو محاسبه شده و برای الگو ثابت تلقی می شوند. متغیرهای درونزا متغیرهای درونی الگو بوده و نسبت به زمان متغیرند و می بایست تابعی از متغیرهای ثابت برونزا باشند. اکنون چند مدل اقتصادی را بیان می کنیم.

الگوی کلان دومار[22]: ای. دومار[23] الگوی زیر را بیان می کند: بگیرید s پس انداز، I سرمایه گذاری و y درآمد متغیرهای درونزا بوده و توابعی از زمان باشند و الگوی زیر را بگیرید:

پس انداز متناسب با درآمد است	$s(t)=\alpha y(t)$
سرمایه گذاری متناسب با نرخ تغییر درآمد است	$I(t)=\beta\dfrac{dy}{dt}$
سرمایه گذاری برابر با پس انداز است	$s(t)=I(t)$
	$y(0)=y_0$
	$\alpha>0,\beta>0$

که در آن α و β برونزا و y_0 شرط اولیه است.

برای تحلیل الگو، طبق معادلات اول و سوم، معادلهٔ دوم را چنین می نویسیم $\alpha y(t)=\beta\frac{dy}{dt}$ که با جداسازی داریم $\frac{dy}{y}=\frac{\alpha}{\beta}dt$ و با انتگرالگیری از طرفین

$$\int_0^{y_0}\frac{dy}{y}=\int_0^t\frac{\alpha}{\beta}dt$$

و بدینترتیب $y(t)=y_0e^{\frac{\alpha}{\beta}t}$ و همچنین $s(t)=I(t)=\alpha y_0e^{\frac{\alpha}{\beta}t}$.

الگوی تعدیل قیمت اوانس[24]: جی. اوانس[25] الگوی زیر را برای تعادل قیمت کالائی در بازاری خاص بیان می کند. اگر d تقاضا، p قیمت و s عرضه، توابعی از زمان بوده و روابط زیر

[18] *Static*
[19] *Dynamic*
[20] *Endogenous*
[21] *Exogenous*
[22] *Domar Macro Model*
[23] *E.D.Domar*
[24] *Evance Price Adjustment Model*
[25] *G.C.Evance*

را داشته باشیم:

تابع تقاضا	$d(t) = \alpha_0 + \beta_0 p(t)$
تابع عرضه	$s(t) = \alpha_1 + \beta_1 p(t)$
نرخ تغییر قیمت متناسب با تقاضای اضافی است	$\frac{dp}{dt} = \kappa(d - s)$
$(*)$	$\beta_0 < 0,\ \beta_1 > 0, \kappa > 0$

آنچه در این الگوی پویا با توابع عرضه و تقاضای خطی[۲۶] دیده می شود این است که الگو برای کالائی بکار می رود که نرخ تغییر قیمت در واحد زمان را بتوان متناسب با کسریِ[۲۷] $d - s$ در نظر گرفت.

جهت تحلیل مدل، از معادلات اول و دوم بجای d و s در معادلهٔ سوم قرار داده و داریم:

$$\frac{dp}{dt} = \kappa(\alpha_0 + \beta_0 p - \alpha_1 - \beta_1 p)$$

$$\frac{dp}{(\alpha_0 - \alpha_1) + (\beta_0 - \beta_1)p} = \kappa dt$$

$$\int \frac{dp}{(\alpha_0 - \alpha_1) + (\beta_0 - \beta_1)p} = \int \kappa dt$$

و حاصل این انتگرال عبارتست از

$$p(t) = Ce^{\kappa(\beta_0 - \beta_1)t} - \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\beta_0 - \beta_1}$$

برای یافتن نقطهٔ تعادل بازار $d = s$ بوده و اگر p_e قیمت تعادل باشد $\alpha_0 + \beta_0 p_e = \alpha_1 + \beta_1 p_e$ پس $p_e = -\frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\beta_0 - \beta_1}$ و تابع قیمت عبارتست از

$$p(t) = Ce^{\kappa(\beta_0 - \beta_1)t} + p_e$$

بشرط اینکه در $t = 0$ قیمت $p = p_0$ باشد سپس $C = p_0 - p_e$. بدین ترتیب

$$p(t) = (p_0 - p_e)e^{\kappa(\beta_0 - \beta_1)t} + p_e \qquad (**)$$

از طرفی با توجه به شروط $(*)$ از آنجا که $\kappa(\beta_0 - \beta_1) < 0$ سپس

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} (p_0 - p_e)e^{\kappa(\beta_0 - \beta_1)t} + p_e = p_e$$

یعنی در طول زمان قیمت کالا به حالت تعادل خواهد رسید. اما تحت چه شرایطی قیمت پویای $p(t)$ همگرا به قیمت تعادلی p_e خواهد شد؟ این خاصیت را پایداری[۲۸] قیمت پویا نامند. در

[۲۶] *Linear Demand and Supply*
[۲۷] *Shortage*
[۲۸] *Stability*

واقع این حالت تنها وقتی اتفاق می افتد که شیب منحنی عرضه $\beta_1 > ۰$ و شیب منحنی تقاضا $\beta_۰ < ۰$ باشد و در حالات دیگر ممکن است هیچگاه قیمت بازار به تعادل خود نرسد.

در انتها اینکه با جایگذاری مقدار $(**)$ براحتی می توان توابع d و s را از مسئله تعیین مقدار نمود.

مثال ۱۸.۱۱ اگر در الگوی تعدیل قیمت اوانس، $d = ۲۷ - ۲p$ و $s = ۳ + ۴p$ بترتیب عرضه و تقاضای کالائی باشند و در $t = ۰$ قیمت کالا یک تومان و در $t = ۲$ قیمت سه تومان باشد تابع قیمت و عرضه و تقاضای کالا را در تعادل بازار بیابید.

حل. از آنجا که $d - s = ۲۷ - ۲p - ۳ - ۴p = ۲۴ - ٦p$ داریم $\frac{dp}{dt} = \kappa(۲۴ - ٦p)$ لذا $\frac{dp}{۲۴ - ٦p} = \kappa dt$ و

$$\int \frac{dp}{۲۴ - ٦p} = \int \kappa dt$$

که حاصل انتگرال $\frac{-۱}{٦}\ln(۲۴ - ٦p) = \kappa t + C$ است و بصورت $۲۴ - ٦p = e^{-٦kt - ٦C}$ ساده می شود. برای پیدا کردن ثابتهای κ و C از شروط اولیه چنین می یابیم که

$$\begin{cases} t = ۰, \\ p = ۱. \end{cases} \Rightarrow \quad ۲۴ - ٦ = e^{-٦C} \quad \Rightarrow \quad C = -۰/۴۸$$

$$\begin{cases} t = ۲, \\ p = ۳. \end{cases} \Rightarrow \quad ۲۴ - ۱۸ = e^{-۱۲\kappa + ۲/۸۸} \quad \Rightarrow \quad \kappa = ۰/۰۹$$

از جایگذاری در معادلهٔ $۲۴ - ٦p = e^{-٦\kappa t - ٦C}$ داریم $۲۴ - ٦p = ۱۷/۸e^{-۰/۵۵t}$ و تابع قیمت

$$p = -۲/۹۷e^{-۰/۵۵t} + ۴$$

حاصل می گردد. پس عرضه و تقاضا عبارتند از

$$d = ۵/۹۴e^{-۰/۵۵t} + ۱۹ \qquad , \qquad s = -۱۱/۸۸e^{-۰/۵۵t} + ۱۹$$

واضح است که نقطهٔ تعادل بازار $\lim_{t\to\infty} p = \lim_{t\to\infty} ۱٦۴e^{۱/۴۵t} + ۴ = ۴$ تومان است که از قیمت عرضه شده کمی بالاتر خواهد بود.

محاسبهٔ تابع تقاضا با معلوم بودن کشش: هدف یافتن تابع تقاضای $Q = f(P)$ است چنانکه همواره کشش نقطه ای تقاضا $۱-$ باشد. کلی تر اینکه کشش نقطه ای ثابت و برابر $-k$ بوده و تابع تقاضا از نقطهٔ $(۱, ۱)$ بگذرد.

حل. فرمول کشش نقطه ای تقاضا عبارتست از $\varepsilon = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$ که برای $\varepsilon = -۱$ داریم $\frac{dQ}{Q} = -\frac{dP}{P}$ و با انتگرالگیری از طرفین داریم $Q = \frac{C}{P}$ و معادلهٔ یک هذلولی است. کلی‌تر

اینکه اگر $\varepsilon = -k$ باشد سپس $\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = -k$ و داریم $\frac{dQ}{Q} = -k\frac{dP}{P}$ و با انتگرالگیری از طرفین داریم $Q = \frac{C}{P^k}$ و معادله برای اینکه از نقطهٔ $(۱, ۱)$ بگذرد باید $C = ۱$ بوده و بنابراین $Q = \frac{۱}{P^k}$.

تمرین ۷.۱۱ .

۱) اگر در الگوی تعدیل قیمت اوانس، $d = ۸ - ۲p$ و $s = ۲ + p$ بترتیب عرضه و تقاضای کالائی باشند و در $t = ۰$ قیمت ۵ تومان و در $t = ۲$ قیمت سه تومان باشد تابع قیمت و عرضه و تقاضا را بیابید.

۲) از الگوی تعدیل قیمت اوانس نتیجه شد که قیمت بازار می بایست از فرمول $(**)$ پیروی نماید. با استفاده از تقریب e^{ε} (تمرین ۱۱.۹؛ ۵۰) نزدیک ترین زمان ممکن برای رسیدن به قیمت تعادل بازار را تعیین نمائید.

۳) مطلوبست تعیین تابع تقاضای $Q = f(P)$ بطوری که کشش تقاضا بصورت

$$\frac{EQ}{EP} = \frac{-۵P - ۲P^۲}{Q}$$

باشد، با این فرض که $P = ۱۰$ و $Q = ۵۰$ باشد.

۴) الگوی زیر را در نظر بگیرید:

$$\hat{c}(t) = g\hat{y}(t)$$
$$\hat{I}(t) = b\hat{y}(t)$$
$$\frac{d\hat{y}}{dt} = a(\hat{c} + \hat{I} - \hat{y})$$
$$۰ < a, b, g < ۱$$

که در آن $\hat{c}$، $\hat{I}$ و $\hat{y}$ مقدار انحراف مصرف، سرمایه گذاری و درآمد از مقادیر تعادلی آن یعنی c_e، I_e و y_e است. مثلاً داریم $\hat{c} = c(t) - c_e$ که c تابع مصرف است. مطلوبست تعیین تابع درآمد با فرض آنکه داشته باشیم $y(۰) = y_۰$. در شرایط پایداری بحث کنید.

۵) الگوی بدهی دومار برای تشریح رابطهٔ بین درآمد ملی و بدهی ملی بصورت زیر می‌باشد

$$\frac{dD}{dt} = \alpha y(t), \quad D(۰) = D_۰$$
$$\frac{dy}{dt} = \beta y(t), \quad y(۰) = y_۰, \quad \alpha, \beta > ۰$$

الگو را حل کرده و ثابت کنید حد نسبت $\frac{D}{y}$ هنگامی که t بسمت بینهایت میل می کند برابر $\frac{\alpha}{\beta}$ است.

۵.۴.۱۱ قانون کنش جرمی

قانون کنش جرمی بیان می کند که اگر مواد A و B با هم ترکیب شده و مادهٔ C را تولید کنند سپس میزان تغییر مقدار C با حاصلضرب مقادیر باقی مانده از A و B در هر لحظه متناسب است.

گیریم α گرم از ماده A و β گرم از مادهٔ B در ابتدا موجود باشد. سپس a گرم از A با b گرم از B ترکیب و $a+b$ گرم ماده C را تولید نماید. اگر مقدار C در لحظهٔ t مساوی x گرم باشد سپس C شامل $\frac{a}{a+b}x$ گرم از A و $\frac{b}{a+b}x$ گرم از B است. در این لحظهٔ t مقدار $\alpha-\frac{a}{a+b}x$ گرم از A و $\beta-\frac{b}{a+b}x$ گرم از B باقی مانده است. طبق قانون کنش جرمی

$$\frac{dx}{dt}=k(\alpha-\frac{a}{a+b}x)(\beta-\frac{b}{a+b}x)$$

و k ثابت تناسب است. سپس

$$\frac{dx}{dt}=k\frac{ab}{(a+b)^{۲}}(\frac{a+b}{a}\alpha-x)(\frac{a+b}{b}\beta-x)$$

و برای ساده شدن عبارت با فرض $\frac{a+b}{a}\alpha=r$ و $\frac{a+b}{a}\beta=s$ پس $\frac{dx}{dt}=k(r-x)(s-x)$ و برای حل آن با تفکیک متغیرها می نویسیم:

$$\frac{dx}{(r-x)(s-x)}=kdt \qquad (\dagger)$$

با انتگرالگیری از طرفین داریم

$$\int_{\circ}^{x}\frac{dx}{(r-x)(s-x)}=\int_{\circ}^{t}kdt$$

که برای دو حالت $a\neq b$ و $a=b$ بطور جداگانه می توان انتگرال را محاسبه نمود. دقت کنید در لحظهٔ نخست واکنش $x=\circ$ است. همچنین $x\leq r,s$.

مثال ۱۹.۱۱ دو مادهٔ A و B طبق قانون کنش جرمی واکنش داده و مادهٔ C را تولید می نمایند. اگر طی ۴ دقیقه مقدار ۸۵ گرم از A با ٦۰ گرم از B واکنش دهد و ۲۰ گرم از C تولید شده باشد طی ۱۰ دقیقه این مقدار چقدر خواهد بود؟

حل. گیریم x مقدار تولید شدهٔ مادهٔ C پس از زمان t باشد. طبق معادلهٔ $(\dagger)$ داریم

$$\frac{dx}{(۸۵-x)(٦۰-x)}=kdt$$

یا

$$\int_{\circ}^{۲۰}\frac{dx}{(x-۸۵)(x-٦۰)}=\int_{\circ}^{۴}kdt$$

سپس با انتگرالگیری $۴k = \frac{۱}{۲۵} \ln \frac{x-۸۵}{x-٦۰}\Big|_{۰}^{۲۰}$ و بنابراین $k = \frac{۱}{۱۰۰} \ln \left(\frac{۳۹}{۳۴}\right)$ و با ساده کردن عبارت داریم:

$$\int_{۰}^{x} \frac{dx}{(x-۸۵)(x-٦۰)} = \int_{۰}^{۱۰} \frac{۱}{۱۰۰} \ln \left(\frac{۳۹}{۳۴}\right) dt = \frac{۱}{۱۰} \ln \left(\frac{۳۹}{۳۴}\right)$$

و جواب این معادله عبارتست از ۳۴/۹ گرم.

تمرین ۸.۱۱ .

۱) دو مادهٔ A و B طبق قانون کنش جرمی واکنش داده و مادهٔ C را تولید می نمایند. اگر طی ٦ دقیقه مقدار ۱۰۰ گرم از A با ۵۰ گرم از B واکنش دهد و ۱۵ گرم از C تولید شده باشد، نشان دهید که طی ۲۰ دقیقه ۳۲/۳ گرم از C تولید می شود.

۲) طبق قانون کنش جرمی دو مادهٔ A و B واکنش داده و مادهٔ C را تولید می کنند. اگر طی ۳ دقیقه مقدار ۵۰ گرم از A با ۴۰ گرم از B واکنش دهد و ۵ گرم از C تولید شده باشد طی چه مدت این مقدار به ۱۳ گرم خواهد رسید؟

۳) فرض کنید برای تولید مادهٔ C لازم است دو مادهٔ A و B واکنش دهند. در ابتدا مقدار ٦۰۰ گرم از هر دو مادهٔ A و B موجود بوده و برای تولید ۵۰ گرم از C به ۳۰ گرم از A و ۲۰ گرم از B نیاز است. اینک مواد را واکنش داده و پس از ٦۰ دقیقه، ۱۵۰ گرم از مادهٔ C تولید شده است. طبق قانون کنش جرمی رابطه ای را برای تولید x گرم از مادهٔ C طی t دقیقه بیابید. از این رابطه محاسبه نمائید که پس از ۱۰۰ دقیقه چه مقدار از مادهٔ C تولید شده است.

فصل ۱۲

ضمائم

- جدول مقادیر مثلثاتی
- نسبتها و توابع مثلثاتی
- فرمول های مشتق
- فرمول های انتگرال
- الفبای یونانی
- نمادهای ریاضی

جدول مقادیر مثلثاتی

زاویه (درجه)	زاویه (رادیان)	sin	cos	tan	cot
۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰	∞
۱	۰/۰۱۷	۰/۰۱۷	۱/۰۰۰	۰/۰۱۷	۵۷/۲۹
۲	۰/۰۳۵	۰/۰۳۵	۰/۹۹۹	۰/۰۳۵	۲۸/۶۳
۳	۰/۰۵۲	۰/۰۵۲	۰/۹۹۹	۰/۰۵۲	۱۹/۰۸
۴	۰/۰۷۰	۰/۰۷۰	۰/۹۹۸	۰/۰۷۰	۱۴/۳۰
۵	۰/۰۸۷	۰/۰۸۷	۰/۹۹۶	۰/۰۸۷	۱۱/۴۳
۶	۰/۱۰۵	۰/۱۰۵	۰/۹۹۵	۰/۱۰۵	۹/۵۱۴
۷	۰/۱۲۲	۰/۱۲۲	۰/۹۹۳	۰/۱۲۳	۸/۱۴۴
۸	۰/۱۴۰	۰/۱۳۹	۰/۹۹۰	۰/۱۴۱	۷/۱۱۵
۹	۰/۱۵۷	۰/۱۵۶	۰/۹۸۸	۰/۱۵۸	۶/۳۱۴
۱۰	۰/۱۷۵	۰/۱۷۴	۰/۹۸۵	۰/۱۷۶	۵/۶۷۱
۱۱	۰/۱۹۲	۰/۱۹۱	۰/۹۸۲	۰/۱۹۴	۵/۱۴۵
۱۲	۰/۲۰۹	۰/۲۰۸	۰/۹۷۸	۰/۲۱۳	۴/۷۰۵
۱۳	۰/۲۲۷	۰/۲۲۵	۰/۹۷۴	۰/۲۳۱	۴/۳۳۱
۱۴	۰/۲۴۴	۰/۲۴۲	۰/۹۷۰	۰/۲۴۹	۴/۰۱۱
۱۵	۰/۲۶۲	۰/۲۵۹	۰/۹۶۶	۰/۲۶۸	۳/۷۳۲
۱۶	۰/۲۷۹	۰/۲۷۶	۰/۹۶۱	۰/۲۸۷	۳/۴۸۷
۱۷	۰/۲۹۷	۰/۲۹۲	۰/۹۵۶	۰/۳۰۶	۳/۲۷۱
۱۸	۰/۳۱۴	۰/۳۰۹	۰/۹۵۱	۰/۳۲۵	۳/۰۷۸
۱۹	۰/۳۳۲	۰/۳۲۶	۰/۹۴۶	۰/۳۴۴	۲/۹۰۴
۲۰	۰/۳۴۹	۰/۳۴۲	۰/۹۴۰	۰/۳۶۴	۲/۷۴۷
۲۱	۰/۳۶۷	۰/۳۵۸	۰/۹۳۴	۰/۳۸۴	۲/۶۰۵
۲۲	۰/۳۸۴	۰/۳۷۵	۰/۹۲۷	۰/۴۰۴	۲/۴۷۵
۲۳	۰/۴۰۱	۰/۳۹۱	۰/۹۲۱	۰/۴۲۴	۲/۳۵۶
۲۴	۰/۴۱۹	۰/۴۰۷	۰/۹۱۴	۰/۴۴۵	۲/۲۴۶
۲۵	۰/۴۳۶	۰/۴۲۳	۰/۹۰۶	۰/۴۶۶	۲/۱۴۵
۲۶	۰/۴۵۴	۰/۴۳۸	۰/۸۹۹	۰/۴۸۸	۲/۰۵۰
۲۷	۰/۴۷۱	۰/۴۵۴	۰/۸۹۱	۰/۵۱۰	۱/۹۶۳
۲۸	۰/۴۸۹	۰/۴۶۹	۰/۸۸۳	۰/۵۳۲	۱/۸۸۱
۲۹	۰/۵۰۶	۰/۴۸۵	۰/۸۷۵	۰/۵۵۴	۱/۸۰۴
۳۰	۰/۵۲۴	۰/۵۰۰	۰/۸۶۶	۰/۵۷۷	۱/۷۳۲
۳۱	۰/۵۴۱	۰/۵۱۵	۰/۸۵۷	۰/۶۰۱	۱/۶۶۴
۳۲	۰/۵۵۹	۰/۵۳۰	۰/۸۴۸	۰/۶۲۵	۱/۶۰۰
۳۳	۰/۵۷۶	۰/۵۴۵	۰/۸۳۹	۰/۶۴۹	۱/۵۴۰
۳۴	۰/۵۹۳	۰/۵۵۹	۰/۸۲۹	۰/۶۷۵	۱/۴۸۳
۳۵	۰/۶۱۱	۰/۵۷۴	۰/۸۱۹	۰/۷۰۰	۱/۴۲۸
۳۶	۰/۶۲۸	۰/۵۸۸	۰/۸۰۹	۰/۷۲۷	۱/۳۷۶
۳۷	۰/۶۴۶	۰/۶۰۲	۰/۷۹۹	۰/۷۵۴	۱/۳۲۷
۳۸	۰/۶۶۳	۰/۶۱۶	۰/۷۸۸	۰/۷۸۱	۱/۲۸۰
۳۹	۰/۶۸۱	۰/۶۲۹	۰/۷۷۷	۰/۸۱۰	۱/۲۳۵
۴۰	۰/۶۹۸	۰/۶۴۳	۰/۷۶۶	۰/۸۳۹	۱/۱۹۲
۴۱	۰/۷۱۶	۰/۶۵۶	۰/۷۵۵	۰/۸۶۹	۱/۱۵۰
۴۲	۰/۷۳۳	۰/۶۶۹	۰/۷۴۳	۰/۹۰۰	۱/۱۱۱
۴۳	۰/۷۵۰	۰/۶۸۲	۰/۷۳۱	۰/۹۳۳	۱/۰۷۲
۴۴	۰/۷۶۸	۰/۶۹۵	۰/۷۱۹	۰/۹۶۶	۱/۰۳۶
۴۵	۰/۷۸۵	۰/۷۰۷	۰/۷۰۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰

زاویه (درجه)	زاویه (رادیان)	sin	cos	tan	cot
۴۵	۰/۷۸۵	۰/۷۰۷	۰/۷۰۷	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
۴۶	۰/۸۰۳	۰/۷۱۹	۰/۶۹۵	۱/۰۳۶	۰/۹۶۶
۴۷	۰/۸۲۰	۰/۷۳۱	۰/۶۸۲	۱/۰۷۲	۰/۹۳۳
۴۸	۰/۸۳۸	۰/۷۴۳	۰/۶۶۹	۱/۱۱۱	۰/۹۰۰
۴۹	۰/۸۵۵	۰/۷۵۵	۰/۶۵۶	۱/۱۵۰	۰/۸۶۹
۵۰	۰/۸۷۳	۰/۷۶۶	۰/۶۴۳	۱/۱۹۲	۰/۸۳۹
۵۱	۰/۸۹۰	۰/۷۷۷	۰/۶۲۹	۱/۲۳۵	۰/۸۱۰
۵۲	۰/۹۰۸	۰/۷۸۸	۰/۶۱۶	۱/۲۸۰	۰/۷۸۱
۵۳	۰/۹۲۵	۰/۷۹۹	۰/۶۰۲	۱/۳۲۷	۰/۷۵۴
۵۴	۰/۹۴۲	۰/۸۰۹	۰/۵۸۸	۱/۳۷۶	۰/۷۲۷
۵۵	۰/۹۶۰	۰/۸۱۹	۰/۵۷۴	۱/۴۲۸	۰/۷۰۰
۵۶	۰/۹۷۷	۰/۸۲۹	۰/۵۵۹	۱/۴۸۳	۰/۶۷۵
۵۷	۰/۹۹۵	۰/۸۳۹	۰/۵۴۵	۱/۵۴۰	۰/۶۴۹
۵۸	۱/۰۱۲	۰/۸۴۸	۰/۵۳۰	۱/۶۰۰	۰/۶۲۵
۵۹	۱/۰۳۰	۰/۸۵۷	۰/۵۱۵	۱/۶۶۴	۰/۶۰۱
۶۰	۱/۰۴۷	۰/۸۶۶	۰/۵۰۰	۱/۷۳۲	۰/۵۷۷
۶۱	۱/۰۶۵	۰/۸۷۵	۰/۴۸۵	۱/۸۰۴	۰/۵۵۴
۶۲	۱/۰۸۲	۰/۸۸۳	۰/۴۶۹	۱/۸۸۱	۰/۵۳۲
۶۳	۱/۱۰۰	۰/۸۹۱	۰/۴۵۴	۱/۹۶۳	۰/۵۱۰
۶۴	۱/۱۱۷	۰/۸۹۹	۰/۴۳۸	۲/۰۵۰	۰/۴۸۸
۶۵	۱/۱۳۴	۰/۹۰۶	۰/۴۲۳	۲/۱۴۵	۰/۴۶۶
۶۶	۱/۱۵۲	۰/۹۱۴	۰/۴۰۷	۲/۲۴۶	۰/۴۴۵
۶۷	۱/۱۶۹	۰/۹۲۱	۰/۳۹۱	۲/۳۵۶	۰/۴۲۴
۶۸	۱/۱۸۷	۰/۹۲۷	۰/۳۷۵	۲/۴۷۵	۰/۴۰۴
۶۹	۱/۲۰۴	۰/۹۳۴	۰/۳۵۸	۲/۶۰۵	۰/۳۸۴
۷۰	۱/۲۲۲	۰/۹۴۰	۰/۳۴۲	۲/۷۴۷	۰/۳۶۴
۷۱	۱/۲۳۹	۰/۹۴۶	۰/۳۲۶	۲/۹۰۴	۰/۳۴۴
۷۲	۱/۲۵۷	۰/۹۵۱	۰/۳۰۹	۳/۰۷۸	۰/۳۲۵
۷۳	۱/۲۷۴	۰/۹۵۶	۰/۲۹۲	۳/۲۷۱	۰/۳۰۶
۷۴	۱/۲۹۲	۰/۹۶۱	۰/۲۷۶	۳/۴۸۷	۰/۲۸۷
۷۵	۱/۳۰۹	۰/۹۶۶	۰/۲۵۹	۳/۷۳۲	۰/۲۶۸
۷۶	۱/۳۲۶	۰/۹۷۰	۰/۲۴۲	۴/۰۱۱	۰/۲۴۹
۷۷	۱/۳۴۴	۰/۹۷۴	۰/۲۲۵	۴/۳۳۱	۰/۲۳۱
۷۸	۱/۳۶۱	۰/۹۷۸	۰/۲۰۸	۴/۷۰۵	۰/۲۱۳
۷۹	۱/۳۷۹	۰/۹۸۲	۰/۱۹۱	۵/۱۴۵	۰/۱۹۴
۸۰	۱/۳۹۶	۰/۹۸۵	۰/۱۷۴	۵/۶۷۱	۰/۱۷۶
۸۱	۱/۴۱۴	۰/۹۸۸	۰/۱۵۶	۶/۳۱۴	۰/۱۵۸
۸۲	۱/۴۳۱	۰/۹۹۰	۰/۱۳۹	۷/۱۱۵	۰/۱۴۱
۸۳	۱/۴۴۹	۰/۹۹۳	۰/۱۲۲	۸/۱۴۴	۰/۱۲۳
۸۴	۱/۴۶۶	۰/۹۹۵	۰/۱۰۵	۹/۵۱۴	۰/۱۰۵
۸۵	۱/۴۸۴	۰/۹۹۶	۰/۰۸۷	۱۱/۴۳	۰/۰۸۷
۸۶	۱/۵۰۱	۰/۹۹۸	۰/۰۷۰	۱۴/۳۰	۰/۰۷۰
۸۷	۱/۵۱۸	۰/۹۹۹	۰/۰۵۲	۱۹/۰۸	۰/۰۵۲
۸۸	۱/۵۳۶	۰/۹۹۹	۰/۰۳۵	۲۸/۶۳	۰/۰۳۵
۸۹	۱/۵۵۳	۱/۰۰۰	۰/۰۱۷	۵۷/۲۹	۰/۰۱۷
۹۰	۱/۵۷۱	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰	∞	۰/۰۰۰

نسبتها و توابع مثلثاتی

جداول و فرمول های مختلف مثلثاتی را که در صورت لزوم می توان به آنها مراجعه کرد.

زاویه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞	۰	∞	۰
cot	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	∞	۰	∞

نسبت های مثلثاتی در ربع ها:

ربع چهارم	ربع سوم	ربع دوم
$\sin(۲\pi-\theta)=-\sin\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$	$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$
$\cos(۲\pi-\theta)=\cos\theta$	$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$	$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$
$\tan(۲\pi-\theta)=-\tan\theta$	$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$	$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(۲\pi-\theta)=-\cot\theta$	$\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$	$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$

روابط بین نسبت های مثلثاتی sin، cos، tan و cot با پارامترهای x و a و b و p و q که متغیرهای دلخواه هستند، بصورت زیر است:

$$\sin^{۲} x+\cos^{۲} x = ۱ \quad (۱)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (۲)$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (۳)$$

$$\tan x\cot x = ۱ \quad (۴)$$

$$\tan x = \frac{۱}{\cot x} \quad (۵)$$

$$\cot x = \frac{۱}{\tan x} \quad (۶)$$

$$۱+\tan^{۲} x = \frac{۱}{\cos^{۲} x} \quad (۷)$$

$$۱+\cot^{۲} x = \frac{۱}{\sin^{۲} x} \quad (۸)$$

$$\sin x = \pm\sqrt{۱-\cos^{۲} x} \quad (۹)$$

$$\sin x = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^{۲} x}} \quad (۱۰)$$

$$\sin x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۱+\cot^۲ x}} \quad (۱۱)$$

$$\cos x = \pm\sqrt{۱-\sin^۲ x} \quad (۱۲)$$

$$\cos x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}} \quad (۱۳)$$

$$\cos x = \pm\frac{\cot x}{\sqrt{۱+\cot^۲ x}} \quad (۱۴)$$

$$\sin(a+b) = \sin a\ \cos b + \cos a\ \sin b \quad (۱۵)$$

$$\sin(a-b) = \sin a\ \cos b - \cos a\ \sin b \quad (۱٦)$$

$$\cos(a+b) = \cos a\ \cos b - \sin a\ \sin b \quad (۱۷)$$

$$\cos(a-b) = \cos a\ \cos b + \sin a\ \sin b \quad (۱۸)$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{۱ - \tan a\ \tan b} \quad (۱۹)$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{۱ + \tan a\ \tan b} \quad (۲۰)$$

$$\cot(a+b) = \frac{\cot a\ \cot b - ۱}{\cot a + \cot b} \quad (۲۱)$$

$$\cot(a-b) = \frac{\cot a\ \cot b + ۱}{\cot a - \cot b} \quad (۲۲)$$

$$\sin a\ \cos b = \frac{۱}{۲}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \quad (۲۳)$$

$$\sin a\ \sin b = \frac{-۱}{۲}[\cos(a+b) - \cos(a-b)] \quad (۲۴)$$

$$\cos a\ \cos b = \frac{۱}{۲}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \quad (۲۵)$$

$$\cos p + \cos q = ۲\cos(\frac{p+q}{۲})\cos(\frac{p-q}{۲}) \quad (۲٦)$$

$$\cos p - \cos q = -۲\sin(\frac{p+q}{۲})\sin(\frac{p-q}{۲}) \quad (۲۷)$$

$$\sin p + \sin q = ۲\sin(\frac{p+q}{۲})\cos(\frac{p-q}{۲}) \quad (۲۸)$$

$$\sin p - \sin q = ۲\cos(\frac{p+q}{۲})\sin(\frac{p-q}{۲}) \quad (۲۹)$$

$$\tan p \pm \tan q = \frac{\sin(p\pm q)}{\cos p\ \cos q} \quad (۳۰)$$

$$\cot p \pm \cot q = \frac{\sin(q\pm p)}{\sin p\ \sin q} \quad (۳۱)$$

$$\sin ۲x = ۲\sin x.\cos x \quad (۳۲)$$

$$\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x \quad (۳۳)$$

$$\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱ \quad (۳۴)$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \quad (35)$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad (36)$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad (37)$$
$$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} \quad (38)$$
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \quad (39)$$
$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x} \quad (40)$$
$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \quad (41)$$
$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \quad (42)$$
$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} \quad (43)$$
$$\cot x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}} \quad (44)$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad (45)$$
$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \quad (46)$$

چند تبدیل نسبت مثلثاتی زیر نیز گاهی استفاده می شوند:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta \quad , \quad \sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos\theta$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta \quad , \quad \cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin\theta$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cot\theta \quad , \quad \tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\cot\theta$$
$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta) = \tan\theta \quad , \quad \cot(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\tan\theta$$

فرمول های مشتق

فرمول های مختلف مشتق را که در صورت نیاز می توانید به آنها مراجعه کنید. در این فرمول ها u و v را تابعی دلخواه برحسب x فرض نمائید. a و r نیز اعدادی حقیقی هستند.

$$\text{تابع} \implies \text{مشتق} \tag{۴۷}$$

$$a \implies 0 \tag{۴۸}$$

$$x^r \implies rx^{r-1} \tag{۴۹}$$

$$u^r \implies ru'u^{r-1} \tag{۵۰}$$

$$\sqrt{x} \implies \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad x > 0 \tag{۵۱}$$

$$\sqrt[n]{x^m} \implies \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}} \tag{۵۲}$$

$$\sqrt[n]{u^m} \implies \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}} \tag{۵۳}$$

$$au + bv \implies u'v + v'u \tag{۵۴}$$

$$uv \implies u'v + v'u \tag{۵۵}$$

$$uvw \implies u'vw + v'uw + w'uv \tag{۵۶}$$

$$\frac{u}{v} \implies \frac{u'v - v'u}{v^2} \tag{۵۷}$$

$$\ln\ u \implies \frac{u'}{u} \quad , \quad u > 0 \tag{۵۸}$$

$$\log_a^u \implies \frac{u'}{u\ \ln a} \quad , \quad u > 0\ ;\ a > 0 \tag{۵۹}$$

$$a^u \implies u'a^u \ln a \tag{۶۰}$$

$$e^u \implies u'e^u \tag{۶۱}$$

$$e^{au} \implies au'e^{au} \tag{۶۲}$$

$$u^v \implies u^v(v' \ln u + \frac{vu'}{u}) \tag{۶۳}$$

$$\sin u \implies u' \cos u \tag{۶۴}$$

$$\cos u \implies -u' \sin u \tag{۶۵}$$

$$\tan u \implies u'(1 + \tan^2 u) = u' \sec^2 u \tag{۶۶}$$

$$\cot u \implies -u'(1 + \cot^2 u) = -u' \csc^2 u \tag{۶۷}$$

$$\sec u \implies u' \sec u . \tan u \tag{۶۸}$$

$$\csc u \implies -u'\csc u.\cot u \tag{۶۹}$$

$$\arcsin u \implies \frac{u'}{\sqrt{۱-u^{۲}}} \quad , \quad |u|<۱ \tag{۷۰}$$

$$\arccos u \implies \frac{-u'}{\sqrt{۱-u^{۲}}} \quad , \quad |u|<۱ \tag{۷۱}$$

$$\arctan u \implies \frac{u'}{۱+u^{۲}} \tag{۷۲}$$

$$arccot\ u \implies \frac{-u'}{۱+u^{۲}} \tag{۷۳}$$

$$arcsec\ u \implies \frac{u'}{u\sqrt{u^{۲}-۱}} \tag{۷۴}$$

$$arccsc\ u \implies \frac{-u'}{u\sqrt{u^{۲}-۱}} \tag{۷۵}$$

$$\sinh u \implies u'\cosh u \tag{۷۶}$$

$$\cosh u \implies u'\sinh u \tag{۷۷}$$

$$\tanh u \implies u'(۱+\tanh^{۲} u) = u' sech^{۲} u \tag{۷۸}$$

$$\coth u \implies -u'(۱+\coth^{۲} u) = -u' csch^{۲} u \tag{۷۹}$$

$$sechu \implies -u' sechu.\tanh u \tag{۸۰}$$

$$cschu \implies -u' cschu.\coth u \tag{۸۱}$$

$$\sinh^{-۱} u \implies \frac{u'}{\sqrt{۱+u^{۲}}} \tag{۸۲}$$

$$\cosh^{-۱} u \implies \frac{u'}{\sqrt{u^{۲}-۱}} \quad , \quad |u|>۱ \tag{۸۳}$$

$$\tanh^{-۱} u \implies \frac{u'}{۱-u^{۲}} \quad , \quad |u|<۱ \tag{۸۴}$$

$$\coth^{-۱} u \implies \frac{-u'}{u^{۲}-۱} \quad , \quad |u|>۱ \tag{۸۵}$$

$$sech^{-۱} u \implies \frac{-u'}{u\sqrt{۱-u^{۲}}} \quad , \quad ۰<u<۱ \tag{۸۶}$$

$$csch^{-۱} u \implies \frac{-u'}{|u|\sqrt{۱+u^{۲}}} \quad , \quad u\neq ۰ \tag{۸۷}$$

فرمول های انتگرال

فرمول های مختلف انتگرال را که در صورت لزوم می توان به آنها مراجعه نمود، بشرح زیرند.
در هر فرمول می توان ثابت C که ثابت انتگرالگیری است را افزود، علاوه بر این m و n اعدادی طبیعی و a و b و r اعدادی حقیقی اند.

$$\int du = u \tag{۸۸}$$

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{۸۹}$$

$$\int a\, dx = ax \tag{۹۰}$$

$$\int x^r\, dx = \frac{x^{r+۱}}{r+۱} \qquad , \quad r \neq -۱ \tag{۹۱}$$

$$\int \frac{۱}{x}\, dx = \ln|x| \qquad , \quad x \neq ۰ \tag{۹۲}$$

$$\int \frac{۱}{x-a}\, dx = \ln|x-a| \qquad , \quad x \neq a \tag{۹۳}$$

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} \qquad , \quad x \neq a \tag{۹۴}$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} \qquad , \quad a > ۰ \, , \, a \neq ۱ \tag{۹۵}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^۲ - x^۲}}\, dx = -\sqrt{a^۲ - x^۲} \tag{۹۶}$$

$$\int \frac{۱}{\sqrt{a^۲ - x^۲}}\, dx = \arcsin(\frac{x}{a}) \qquad , \quad a > ۰ \tag{۹۷}$$

$$\int \frac{۱}{\sqrt{a^۲ + x^۲}}\, dx = \sinh^{-۱}(\frac{x}{a}) \qquad , \quad a > ۰ \tag{۹۸}$$

$$\int \frac{۱}{\sqrt{x^۲ \pm a^۲}}\, dx = \ln|x + \sqrt{x^۲ \pm a^۲}| \tag{۹۹}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^۲ \pm a^۲}}\, dx = \sqrt{x^۲ \pm a^۲} \tag{۱۰۰}$$

$$\int \frac{۱}{a^۲ + x^۲}\, dx = \frac{۱}{a}\arctan(\frac{x}{a}) \qquad , \quad a \neq ۰ \tag{۱۰۱}$$

$$\int \frac{۱}{a^۲ - x^۲}\, dx = \frac{۱}{۲a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| \qquad , \quad a \neq ۰ \tag{۱۰۲}$$

$$\int \frac{۱}{a^۲ - x^۲}\, dx = \frac{۱}{a}\tanh^{-۱}\frac{x}{a} \qquad , \quad a \neq ۰ \tag{۱۰۳}$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad , \quad a \neq 0 \tag{۱۰۴}$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{-1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a} \quad , \quad a \neq 0 \tag{۱۰۵}$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx = \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| \quad , \quad a \neq b \tag{۱۰۶}$$

$$\int \frac{1}{x(x+a)}\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|1+\frac{a}{x}\right| \quad , \quad a \neq 0 \tag{۱۰۷}$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax \quad , \quad a \neq 0 \tag{۱۰۸}$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax \quad , \quad a \neq 0 \tag{۱۰۹}$$

$$\int \tan ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| \tag{۱۱۰}$$

$$\int \cot ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| \tag{۱۱۱}$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| \tag{۱۱۲}$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})| \tag{۱۱۳}$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| \tag{۱۱۴}$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\tan\frac{x}{2}| \tag{۱۱۵}$$

$$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2}-\frac{1}{4a}\sin 2ax \tag{۱۱۶}$$

$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2}+\frac{1}{4a}\sin 2ax \tag{۱۱۷}$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan\ x \tag{۱۱۸}$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot\ x \tag{۱۱۹}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot\ x \tag{۱۲۰}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan\ x \tag{۱۲۱}$$

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx \tag{۱۲۲}$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1}x\sin x}{n}+\frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx \tag{۱۲۳}$$

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-۱} x}{n-۱} - \int \tan^{n-۲} x\,dx \quad , \; n \neq ۱ \quad (۱۲۴)$$

$$\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-۱} x}{n-۱} - \int \cot^{n-۲} x\,dx \quad , \; n \neq ۱ \quad (۱۲۵)$$

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{\sec^{n-۲} x \tan x}{n-۱} + \frac{n-۲}{n-۱} \int \sec^{n-۲} x\,dx \quad , \; n \neq ۱ \quad (۱۲۶)$$

$$\int \csc^n x\,dx = -\frac{\csc^{n-۲} x \cot x}{n-۱} + \frac{n-۲}{n-۱} \int \csc^{n-۲} x\,dx, \; n \neq ۱ \quad (۱۲۷)$$

$$\int \arcsin \frac{x}{a}\,dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^۲ - x^۲} \quad , \; a > ۰ \quad (۱۲۸)$$

$$\int \arccos \frac{x}{a}\,dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^۲ - x^۲} \quad , \; a > ۰ \quad (۱۲۹)$$

$$\int \arctan \frac{x}{a}\,dx = x \arctan \frac{x}{a} - a \ln \sqrt{x^۲ + a^۲} \quad , \; a > ۰ \quad (۱۳۰)$$

$$\int arccot\frac{x}{a}\,dx = x\; arccot\frac{x}{a} + a \ln \sqrt{x^۲ + a^۲} \quad (۱۳۱)$$

$$\int arcsec\frac{x}{a}\,dx = x\; arcsec\frac{x}{a} - a \ln \left| x + \sqrt{x^۲ - a^۲} \right| \quad (۱۳۲)$$

$$\int arccsc\frac{x}{a}\,dx = x\; arccsc\frac{x}{a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^۲ - a^۲} \right| \quad (۱۳۳)$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x \quad (۱۳۴)$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x \quad (۱۳۵)$$

$$\int \tanh x\,dx = \ln|\cosh x| \quad (۱۳۶)$$

$$\int \coth x\,dx = \ln|\sinh x| \quad (۱۳۷)$$

$$\int sechx\,dx = \arctan(\sinh x) \quad (۱۳۸)$$

$$\int cschx\,dx = \ln \left| \tanh \frac{x}{۲} \right| \quad (۱۳۹)$$

$$\int cschx\,dx = -\frac{۱}{۲} \ln \frac{\cosh x + ۱}{\cosh x - ۱} \quad (۱۴۰)$$

$$\int \sinh^۲ x\,dx = \frac{۱}{۴} \sinh ۲x - \frac{۱}{۲}x \quad (۱۴۱)$$

$$\int \cosh^۲ x\,dx = \frac{۱}{۴} \sinh ۲x + \frac{۱}{۲}x \quad (۱۴۲)$$

$$\int sech^۲ x\,dx = \tanh x \quad (۱۴۳)$$

$$\int \sinh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\sinh^{-1}\frac{x}{a}-\sqrt{x^2+a^2} \qquad , a\geq 0 \tag{۱۴۴}$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x}dx = -\coth x \tag{۱۴۵}$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}dx = \tanh x \tag{۱۴۶}$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}-\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} \qquad , m^2\neq n^2 \tag{۱۴۷}$$

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} \qquad , m^2\neq n^2 \tag{۱۴۸}$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = -\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} \qquad , m^2\neq n^2 \tag{۱۴۹}$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} \tag{۱۵۰}$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} \tag{۱۵۱}$$

$$\int x^n\sin ax\,dx = -\frac{1}{a}x^n\cos x+\frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx \tag{۱۵۲}$$

$$\int x^n\cos ax\,dx = \frac{1}{a}x^n\sin x-\frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx \tag{۱۵۳}$$

$$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx \tag{۱۵۴}$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x-x \tag{۱۵۵}$$

$$\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n-n\int(\ln x)^{n-1}\,dx \qquad , n\neq -1 \tag{۱۵۶}$$

$$\int x^n\ln(ax)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}[\ln(ax)-\frac{1}{n+1}] \qquad , n\neq -1 \tag{۱۵۷}$$

$$\int x^n(\ln ax)^m\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln ax)^m-\frac{m}{n+1}\int x^n(\ln ax)^{m-1}dx \tag{۱۵۸}$$

$$\int \frac{1}{a+b\sin x}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\arctan\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} \qquad , a^2>b^2 \tag{۱۵۹}$$

$$\int \frac{1}{a+b\cos x}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\arctan\frac{\sqrt{a^2-b^2}\tan\frac{x}{2}}{a+b},\ a^2>b^2 \tag{۱۶۰}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}),\ a\neq 0 \tag{۱۶۱}$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}),\ a\neq 0 \tag{۱۶۲}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) \qquad , \ a \neq 0 \qquad (163)$$

حروف الفبای یونانی

رو	P	ρ	,	یوتا	I	ι	,	آلفا	A	α
سیگما	Σ	σ	,	کاپا	K	κ	,	بتا	B	β
تاو	T	τ	,	لاندا	Λ	λ	,	گاما	Γ	γ
اوپسیلون	Υ	υ	,	مو	M	μ	,	دلتا	Δ	δ
فی	Φ	ϕ, φ	,	نو	N	ν	,	اپسیلون	E	ε, ϵ
چی	X	χ	,	کسای	Ξ	ξ	,	زتا	Z	ζ
پسای	Ψ	ψ	,	اومیکرون	O	o	,	اتا	H	η
اومگا	Ω	ω	,	پای	Π	π	,	تتا	Θ	θ

$\pi =$ ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹۵$\cdots$

$e =$ ۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵۲۳۵۳۶۰۲۸۷۴۷۱۳۵۲۷$\cdots$

نمادهای ریاضی

مثبت، جمع	$+$	*plus, add, positive*
منفی، تفریق	$-$	*minus, less, negative*
ضرب در	$\times$	*multiplied by*
تقسیم بر	$\div$	*divided by*
مساوی است با	$=$	*equals*
معادل با	$\equiv$	*equivalent*
متشابه با	$\sim$	*similar*
تقریبا برابرست با	$\approx$	*approximately*
نامساوی	$\neq$	*not equal*
بزرگتر از	$>$	*greater than*
کوچکتر از	$<$	*less than*
بزرگتر یا مساوی، ناکمتر	$\geq$	*equal to or greater than*
کمتر یا مساوی، نابیشتر	$\leq$	*equal to or less than*
ریشه دوم	$\sqrt{}$	*square root*
ریشه سوم	$\sqrt[۳]{}$	*cube root*
ریشه $n-$ام	$\sqrt[n]{}$	*$n-th$ root*
مثبت یا منفی	$\pm$	*plus or minus*
منفی یا مثبت	$\mp$	*minus or plus*
متناسب است با	$\propto$	*proportional to*
دیفرانسیل	d	*differential*
مشتق جزئی — رند	∂	*partial differentiation*
نابلا — دل	∇	*nabla*
مجموع	Σ	*the sum of*
مثلث	$\triangle$	*triangle*
ضرب نقطه‌ای	$\cdot$	*dot product*
ضرب برداری	$\times$	*cross product*
عبارتست از، بقسمی که	$:$	*is to, divided by*
شش بتوان پنج	$۶^۵$	*۶ to the power of ۵*
a بتوان n	a^n	*$n-th$ power of a*
فاکتوریل	$!$	*factorial*
بی نهایت	∞	*infinity*
نماد انتگرال	$\int$	*integral sign*
مبین	Δ	*characteristic*
تفاضل متناهی	δ	*finite difference*
عدد پی	π	*pi*
عدد نپر، پایه لگاریتم طبیعی	e	*neper number, natural logarithm base*
زاویه	$\angle$	*angle*
درجه، دقیقه، ثانیه	$^{o}\ '\ ''$	*degrees, minutes, seconds*
پرانتز ها	$(\ )$	*parentheses*
براکت	$[\ ]$	*bracket*
آکولاد ها	$\{\ \}$	*braces*
خیلی کوچکتر است از	$\ll$	*more less than*
y پریم	y'	*y prime derivative*
y سکوند	y''	*y second derivative*
y ترد	y'''	*y third derivative*

کتاب‌نامه

[۱] باچلت، ادوارد، ریاضیات در علوم زیستی، ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی و ابوالقاسم شریفیان، مرکز نشر دانشگاهی، جلد اول، ۱۳۷۶.

[۲] پورکاظمی، محمد حسین، ریاضیات عمومی و کاربردهای آن، نشر نی، جلد دوم، چاپ چهارم، ۱۳۷۷.

[۳] توکلی، شهاب، ژئوفیزیک، انتشارات پیام نور، چاپ اول، ۱۳۸۳.

[۴] خزائی، اسماعیل، زمین شناسی عمومی و مهندسی، نشر فرناز، جلد اول، ۱۳۷۸.

[۵] دمیدوویچ، ب.ب.، تمرینات و مسائل آنالیز ریاضی، ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، ۱۳۶۳.

[۶] رزنیک، رابرت، هالیدی، دیوید، کرین، کنت اس.، فیزیک، ترجمهٔ منیژه رهبر و جلال الدین پاشائی راد، مرکز نشر دانشگاهی، جلد اول، ۱۳۸۶.

[۷] سیلورمن، ریچارد آ.، حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی جدید، ترجمه علی اکبر عالم زاده، انتشارات علمی و فنی، چاپ سوم، ۱۳۶۶.

[۸] سیمونز، جورج اف.، معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها، ترجمهٔ علی اکبر بابائی و ابوالقاسم میامئی، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ سیزدهم، ۱۳۸۵.

[۹] شاخنو، کنستانتین، مسائل دشوار ریاضی، ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات فردوس، چاپ سوم، ۱۳۷۴.

[۱۰] کوشچنکو، واسیلی سمینویچ، مسائل مسابقات ریاضی با حل، ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، چاپ هشتم، ۱۳۶۵.

[۱۱] گلدشتاین، لاری جی. لی، دیوید سی.، اشنایدر، آی.، حساب دیفرانسیل و انتگرال و کاربردهای آن، ترجمهٔ محمد مهدی ابراهیمی و سعید فاریابی، انتشارات علمی و فنی، چاپ دوم، ۱۳۷۰.

[۱۲] لوین، ایرا، شیمی فیزیک، ترجمهٔ غلامرضا اسلامپور و دیگران، موسسهٔ فرهنگی فاطمی، چاپ سوم، ۱۳۸۸.

[۱۳] لیتهلد، لوئیس، حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه تحلیلی، ترجمه علی اکبر عالم زاده، نشر علوم نوین، چاپ بیست و پنجم، ۱۳۸۳.

[۱۴] مورتیمر، چارلز، شیمی عمومی ۱، ترجمهٔ عیسی یاوری، نشر علوم دانشگاهی، جلد اول، چاپ بیست و نهم، ۱۳۸۷.

[15] Halliday, David, Resnik, Robert, *Fundamentals of Phisics*, John Wiley & Sons, Inc. 1981.

[16] Krantz, Steven G., *Differential Equation*, McGraw-Hill Companies, 2005.

[17] Peter, Imke, Lissauer, Jack, *Planetary Science*, Cambridge University Press, 2001.

فهرست الفبایی

www.OlumCamp.ir

- نجوم
- حسابداری
- اقتصاد و مدیریت
- تربیت بدنی
- مکانیک
- معماری
- عمران
- زیست
- فیزیک
- برق
- شیمی
- کامپیوتر

وب سایت فروش آنلاین:
www.iranbook.ir

9786006100784

انتشارات سخنکده

تهران، ضلع جنوب شرقی میدان انقلاب بازار بزرگ کتاب
طبقه دوم، واحد ۱ تلفن:۶۶۹۶۲۸۴۱ فکس:۶۶۹۶۲۸۴۲